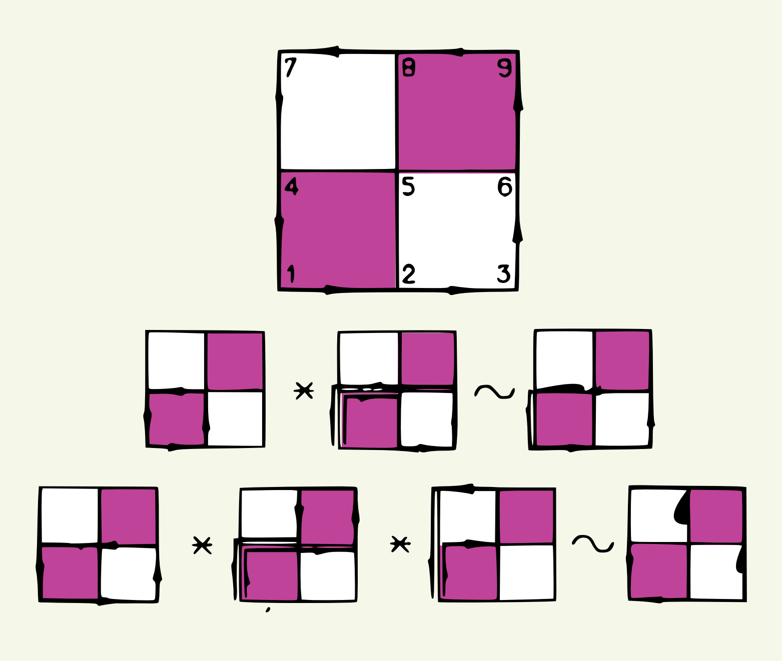
M. Postnikov

Leçons de Géométrie

IV semestre Volume 2

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE



URSS Moscou

M. POSTNIKOV

LEÇONS DE GÉOMÉTRIE

SEMESTRE IV

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

VOLUME 2

URSS
MOSCOU
1994

М. М. Постников

ЛЕКЦИИ ПО ГЕОМЕТРИИ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

том 2

Москва, "Наука"

ISBN 5-88417-045-9
ISBN 5-88417-047-5

TABLE DES MATIÈRES

LEÇON 15

Sous-groupes fermés des groupes de Lie. — Théorème d'Elie Cartan. — Groupes algébriques. — Cartes compatibles avec un sous-groupe de Lie. — Structure différentiable la plus faible sur un sous-groupe d'un groupe de Lie. — Théorème de Freudenthal. — Théorème d'Ado et troisième théorème de Lie. — Groupes de Lie localement isomorphes. — Revêtements de groupe. — Existence d'un revêtement de groupe universel.

Les sous-groupes de Lie d'un groupe de Lie qui sont des sous-variétés plongées jouent incontestablement un rôle de premier plan. Nous les appellerons *fermés* puisqu'on a la

Proposition 1. *Chaque sous-groupe de Lie fermé $\mathscr{H}$ d'un groupe de Lie $\mathscr{G}$ est un sous-ensemble fermé de $\mathscr{G}$.*

Démonstration. Puisque $\mathscr{H}$ est plongé dans $\mathscr{G}$, le point $e \in \mathscr{H}$ possède dans $\mathscr{G}$ un voisinage U tel que $U \cap \mathscr{H}$ soit fermée dans U. On estime sans restreindre la généralité que $U^{-1} = U$. Soit $a \in \overline{\mathscr{H}}$, auquel cas $aU^{-1} \cap \mathscr{H} \neq \varnothing$, et il existe donc un point $b \in \mathscr{H}$ tel qu'il soit dans aU^{-1}. La translation à gauche $q \mapsto bq$ étant un difféomorphisme de la variété $\mathscr{G}$, l'ensemble $b\,(U \cap \mathscr{H}) = bU \cap \mathscr{H}$ est fermé dans bU, i.e. $bU \cap \overline{bU \cap \mathscr{H}} = bU \cap \mathscr{H}$. D'autre part, $a \in bU$, si bien que $a \in bU \cap \overline{\mathscr{H}} \subset \overline{bU \cap \mathscr{H}}$. Par conséquent, $a \in bU \cap \mathscr{H}$, donc $a \in \mathscr{H}$. □

* * *

Il se trouve que la réciproque est juste elle aussi, savoir : *si un sous-groupe de Lie $\mathscr{H}$ constitue un ensemble fermé dans $\mathscr{G}$, il est fermé* (c'est une sous-variété plongée). Il y a plus.

Théorème 1. *Si un sous-ensemble $\mathscr{H}$ d'un groupe de Lie $\mathscr{G}$ est à la fois*

1) *un sous-groupe abstrait de $\mathscr{G}$,*

2) *un sous-ensemble fermé de l'espace topologique $\mathscr{G}$,*

alors il est une sous-variété plongée, donc un sous-groupe de Lie fermé du groupe de Lie $\mathscr{G}$.

Nous ferons précéder la démonstration de plusieurs lemmes et remarques de caractère général.

Soient $\mathscr{G}$ un groupe de Lie, et $\mathscr{H}$ son sous-groupe abstrait.

Nous dirons que $\mathscr{H}$ *vérifie la condition* (F) si l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de $\mathscr{G}$ contient un sous-ensemble $\mathfrak{h}$ tel que

a) $\mathfrak{h}$ soit un sous-espace vectoriel ;

b) si $A \in \mathfrak{h}$, alors $\exp A \in \mathscr{H}$;

c) on trouve un voisinage normal U_0 de l'élément zéro de l'espace

vectoriel $\mathfrak{g}$ qui jouit de la propriété suivante : un vecteur $A \in U_0$ appartient à $\mathfrak{h}$ si et seulement si $\exp A \in \mathscr{H}$.

Quel que soit le sous-groupe de Lie fermé (plongé) $\mathscr{H}$ du groupe de Lie $\mathscr{G}$, le point e possède dans $\mathscr{G}$ un voisinage normal U tel que $V = U \cap \mathscr{H}$ soit un voisinage normal de e dans $\mathscr{H}$. Si l'on considère $\mathfrak{h}$ comme algèbre de Lie de $\mathscr{H}$ et si l'on pose $U_0 = \exp^{-1} U$, on constate donc immédiatement que *le sous-groupe $\mathscr{H}$ remplit la condition* (F).

Lorsque $\mathscr{G} = \mathrm{GL}\,(n\,;\,\mathbb{R})$, les sous-groupes satisfaisant à (F) sont exactement les groupes de Lie de matrices au sens de la définition 1 de III.11. On sait (voir proposition 1 de III.11 et remarque 1 de III.1) qu'il s'agit toujours d'un sous-groupe différentiable et d'une sous-variété plongée, i.e. d'un sous-groupe de Lie fermé (muni de l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$; voir remarque 4 de III.16). Mais si l'on revoit la démonstration de la proposition 1 de III.11, on se convainc de suite qu'elle se passe en fait des caractères spécifiques du groupe $\mathrm{GL}\,(n\,;\,\mathbb{R})$, ce qui la rend valable pour un groupe de Lie $\mathscr{G}$ quelconque. Aussi, *un sous-groupe $\mathscr{H}$ vérifiant (F) d'un groupe de Lie $\mathscr{G}$ est un sous-groupe de Lie fermé.*

Problème 1. Donner une démonstration rigoureuse de la dernière affirmation. Démontrer également que $\mathfrak{h}$ est l'algèbre de Lie du groupe de Lie $\mathscr{H}$.

Ainsi, les sous-groupes de Lie fermés sont exactement les sous-groupes assujettis à la condition (F), si bien qu'on a le théorème 1 si l'on prouve que le sous-groupe $\mathscr{H}$ y figurant est du nombre. A cet effet, il faut trouver le sous-ensemble $\mathfrak{h}$, le voisinage U_0 (ou, ce qui revient au même, le voisinage $U = \exp U_0$) et voir si les propriétés a), b) et c) ont lieu.

Si le théorème 1 est juste, c'est l'algèbre de Lie de $\mathscr{H}$, i.e. l'ensemble des vecteurs $A \in \mathfrak{g}$, avec $\exp tA \in \mathscr{H}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, qui constitue l'ensemble $\mathfrak{h}$. Ceci étant, on définit $\mathfrak{h}$ en tant que sous-ensemble de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, ensemble formé de tous les vecteurs A.

Avec $\mathfrak{h}$ ainsi défini, on démontre la condition a) à l'aide du

Lemme 1. *Soit $\{C_m\}$ une suite convergente de vecteurs de l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$, et soit $C = \lim\limits_{m\to\infty} C_m$ sa limite. S'il existe des nombres t_m non nuls tels que $\lim\limits_{m\to\infty} t_m = 0$ et $\exp t_m C_m \in \mathscr{H}$ pour tout $m \geqslant 1$, alors $C \in \mathfrak{h}$.*

Démonstration. On suppose sans restreindre la généralité que $t_m > 0$, et on désigne donc par n_m pour tout $t \in \mathbb{R}$ un entier satisfaisant à

$$\frac{t}{t_m} - 1 < n_m \leqslant \frac{t}{t_m}$$

(i.e. la partie entière du nombre t/t_m). Comme $t - t_m < n_m t_m \leqslant t$ et $\lim_{m\to\infty} t_m = 0$, on a $\lim_{m\to\infty} n_m t_m = t$, donc

$$\lim_{m\to\infty} \exp(n_m t_m C_m) = \exp tC.$$

D'autre part,

$$\exp(n_m t_m C_m) = (\exp t_m C_m)^{n_m},$$

si bien que $\exp(n_m t_m C) \in \mathcal{H}$. Le groupe $\mathcal{H}$ étant fermé par hypothèse, il s'ensuit que $\exp tC \in \mathcal{H}$. Ainsi, $C \in \mathfrak{h}$. □

Vérification de la condition a). Si $A \in \mathfrak{h}$, on a évidemment $\lambda A \in \in \mathfrak{h}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ (puisque $\exp t(\lambda A) = \exp(t\lambda) A$). Il nous reste donc à démontrer que $A + B \in \mathfrak{h}$ quels que soient les vecteurs $A, B \in \mathfrak{h}$. Conformément à la formule (12) de la leçon 14, on a pour $A, B \in \mathfrak{g}$ quelconques et tout nombre $t \in \mathbb{R}$

$$\exp tA \cdot \exp tB = \exp t(A + B + X_t),$$

où $X_t = o(t)$. Soit $t_m = 1/m$, $C = A + B$, et soit

$$C_m = A + B + X_{t_m}, \quad 1 \leqslant m < \infty.$$

On a $t_m \to 0$, $C_m \to C$ et

$$\exp t_m C_m = \exp t_m (A + B + X_{t_m}) = \exp t_m A \ \exp t_m B \in \mathcal{H}$$

(on rappelle que $\exp tA$, $\exp tB \in \mathcal{H}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ par hypothèse). Aussi, on applique le lemme 1 ($C \in \mathcal{H}$), et on a le résultat voulu $A + B \in \mathcal{H}$. □

Problème 2. Démontrer par les mêmes raisonnements que $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. (Ce fait ne sera pas utilisé dans la démonstration du théorème 1.)

La condition b) étant remplie par définition, la seule chose à vérifier est la propriété c). On aura besoin d'une autre construction générale.

On suppose l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ décomposée en somme directe

(1) $$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{f}$$

de ses sous-espaces $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{f}$. Chaque élément $C \in \mathfrak{g}$ s'écrit de façon unique comme $C = A + B$, $A \in \mathfrak{h}$, $B \in \mathfrak{f}$, si bien que la formule

$$\varphi(C) = \exp A \exp B$$

définit bien l'application (manifestement différentiable)

(2) $$\varphi : \mathfrak{g} \to \mathcal{G}.$$

Lemme 2. *L'application* (2) *est étale au point* $0 \in \mathfrak{g}$.

D é m o n s t r a t i o n. Selon la formule (12) de la leçon 14,

$$\exp A \exp B = \exp(A + B + \ldots) = \exp(C + \ldots),$$

où les points de suspension remplacent les termes de degré $\geqslant 2$ en A et B. Aussi la différentielle de (2) en 0 coïncide-t-elle avec celle de l'application exp, i.e. c'est un isomorphisme (voire une identité). □

On s'intéresse bien sûr à la décomposition (1) où $\mathfrak{h}$ est le sous-espace de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ qu'on a construit ci-dessus à partir du sous-groupe $\mathcal{H}$ (et $\mathfrak{f}$ un sous-espace supplémentaire quelconque). Dans ce cas, on a le

Lemme 3. *Il existe dans $\mathfrak{g}$ un voisinage U_0 du point 0 tel que*

$$\exp B \notin \mathcal{H}$$

pour tout vecteur $B \in U_0 \cap \mathfrak{f}$ non nul.

D é m o n s t r a t i o n. Si l'affirmation du lemme est fausse, $\mathfrak{f}$ contient des éléments B_m tels que $B_m \to 0$ et $\exp B_m \in \mathcal{H}$. Munissons $\mathfrak{f}$ d'une norme $\| \ \|$ (disons, de la norme euclidienne) et cherchons les entiers $n_m \to \infty$ vérifiant

$$1 \leqslant \|n_m B_m\| \leqslant 2$$

pour tout $m = 1, 2, \ldots$ (on conçoit que la chose est possible). Soit $C_m = n_m B_m$ et $t_m = \frac{1}{n_m}$. L'ensemble des vecteurs C, $1 \leqslant \|C\| \leqslant 2$, étant compact, on suppose sans perte de généralité (en passant, si besoin est, à une suite partielle) que la suite $\{C_m\}$ converge. Puisque $t_m \to 0$ et $\exp t_m C_m = \exp B_m \in \mathcal{H}$, cette suite remplit toutes les conditions du lemme 1, si bien que sa limite $C = \lim C_m$ appartient à $\mathfrak{h}$. Or, cela est impossible car $C \in \mathfrak{f}$ ($\mathfrak{f}$ étant fermé) et $C \neq 0$ ($1 \leqslant \|C\| \leqslant 2$) à la fois. La contradiction obtenue démontre le lemme. □

On passe à la

D é m o n s t r a t i o n du théorème 1. Etant donné les résultats obtenus, il nous reste à vérifier c). On montre que c'est la propriété d'un voisinage normal U_0 sur lequel (2) est un difféomorphisme et qui représente U_0 du lemme 3.

Soit $A \in U_0$ et $\exp A \in \mathcal{H}$. Il faut démontrer que $A \in \mathfrak{h}$. On dit à cet effet que puisque (2) est un difféomorphisme sur U_0, le point $\exp A \in U$ s'écrit comme $\exp A_1 \cdot \exp B_1$, avec $A_1 \in \mathfrak{h}$ (donc $\exp A_1 \in \mathcal{H}$) et $B_1 \in \mathfrak{f}$. Mais si $\exp A = \exp A_1 \cdot \exp B_1$ et $\exp A_1 \in \mathcal{H}$, alors $\exp B_1 \in \mathcal{H}$, ce qui n'est possible d'après le lemme 3 que pour $B_1 = 0$. Aussi, $\exp A = \exp A_1$ et, partant, $A = A_1$ (U_0 étant un voisinage normal). Ainsi, $A \in \mathfrak{h}$. □

Ainsi, *les sous-groupes de Lie fermés d'un groupe de Lie $\mathcal{G}$ sont exactement ses sous-groupes, ensembles fermés.* Notre terminologie se trouve complètement justifiée.

Le théorème 1 dû à Elie Cartan apparaît comme un outil des plus efficaces quand on veut établir si tel groupe est un groupe de Lie.

* * *

Exemple 1. Un sous-groupe du groupe GL (n; $\mathbb{R}$) (ou de GL(n; $\mathbb{C}$)) est un *groupe algébrique* s'il est l'ensemble de toutes les matrices non dégénérées qui annulent un système de polynômes en les éléments de ces matrices. Cet ensemble est manifestement fermé (dans GL (n; $\mathbb{K}$)), si bien qu'aux termes du théorème 1, *tout groupe algébrique est un groupe de Lie de matrices.*

Exemple 2. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre quelconque de dimension finie sur le corps $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$ (qui n'est en général ni une algèbre associative ni une algèbre de Lie), et soit $e_1, \ldots, e_n$ une base de $\mathcal{A}$. Il est clair que l'application linéaire inversible $\varphi: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ est un automorphisme de l'algèbre $\mathcal{A}$ si et seulement si $\varphi(e_i e_j) = \varphi(e_i)\varphi(e_j)$ pour n'importe quels $i, j = 1, \ldots, n$. Si $\varphi(e_i) = x_i^k e_k$ et $e_i e_j = c_{ij}^k e_k$, ce qui implique

$$\varphi(e_i e_j) = \varphi(c_{ij}^k e_k) = c_{ij}^k x_k^l e_l,$$

$$\varphi(e_i)\varphi(e_j) = x_i^p e_p \cdot x_j^q e_q = c_{pq}^l x_i^p x_j^q e_l,$$

φ est donc un automorphisme sous la condition nécessaire et suffisante:

$$c_{ij}^k x_k^l = c_{pq}^l x_i^p x_j^q$$

quels que soient $i, j, l = 1, \ldots, n$. Cela veut dire que les matrices $\| x_i^j \|$ associées aux automorphismes de $\mathcal{A}$ forment un groupe algébrique, donc un groupe de Lie. Ce fait munit le groupe Aut $\mathcal{A}$ de tous les automorphismes de l'algèbre $\mathcal{A}$ d'une structure de groupe de Lie qui ne dépend évidemment pas du choix de la base.

Ainsi, *le groupe* Aut $\mathcal{A}$ *des automorphismes d'une algèbre* $\mathcal{A}$ *quelconque de dimension finie est un groupe de Lie.*

Problème 3. Démontrer que *l'algèbre de Lie du groupe de Lie* Aut $\mathcal{A}$ *est canoniquement isomorphe à l'algèbre* Der $\mathcal{A}$ *de toutes les dérivations de* $\mathcal{A}$ (de toutes les applications linéaires $D: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ telles que $D(ab) = Da \cdot b + a \cdot Db$ pour $a, b \in \mathcal{A}$ quelconques).

* * *

Soient de nouveau $\mathcal{H}$ des sous-groupes de Lie quelconques (non nécessairement fermés) d'un groupe de Lie $\mathcal{G}$, et soit $m = \dim \mathcal{H}$ et $n = \dim \mathcal{G}$.

Une carte $(U, h) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ de $\mathcal{G}$ est dite *compatible avec un sous-groupe* $\mathcal{H}$ si elle l'est au sens de III.13 avec toutes les sous-variétés de la forme $L_a\mathcal{H} = a\mathcal{H}$, $a \in \mathcal{G}$, i.e. s'il existe pour tout $a \in \mathcal{G}$, tel que $U \cap a\mathcal{H} \neq \varnothing$, un ensemble $V_a \subset U \cap a\mathcal{H}$ ouvert dans $a\mathcal{H}$ qui présente les propriétés suivantes: *primo*, les

fonctions

$$y^1 = x^1|_{V_a}, \ \ldots, \ y^m = x^m|_{V_a}$$

sont les coordonnées locales sur V_a dans $a\mathcal{H}$, et, *secundo*, l'ensemble V_a (et non $a\mathcal{H}$!) est défini dans U par les équations de la forme

(3) $$x^{m+1} = c^1, \ \ldots, \ x^n = c^{n-m},$$

avec $c^1, \ldots, c^{n-m}$ des constantes (fonctions de a seul).

L'affirmation b) du problème 25 (leçon 14) entraîne de suite qu'*on trouve dans $\mathcal{G}$ pour tout $a \in \mathcal{G}$ une carte (U, h) centrée en a qui est compatible avec $\mathcal{H}$.*

Une autre démonstration. On conçoit qu'il suffit de construire cette carte pour $a = e$ (si (U, h) est compatible avec $\mathcal{H}$ et centrée en e, alors $(aU, h \circ L_a^{-1})$ est compatible avec $\mathcal{H}$ et centrée en a). Ce fait aidant, on considère l'application (2) obtenue pour la décomposition (1), avec $\mathfrak{h}$ l'algèbre de Lie du sous-groupe de Lie $\mathcal{H}$ et $\mathfrak{f}$ un espace supplémentaire arbitraire. L'application (2) étant étale en 0 selon le lemme 2, le point $e \in \mathcal{G}$ admet un voisinage U, domaine de définition de φ^{-1}: $U \to \mathfrak{g}$. Soit h: $U \to \mathbb{R}^n$ le composé de φ^{-1} et de l'isomorphisme de coordonnées $\mathfrak{g} \to \mathbb{R}^n$ compatible avec la décomposition (1), i.e. cet isomorphisme est associé à une base de l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$ dont les m premiers vecteurs appartiennent à la sous-algèbre $\mathfrak{h}$ et les $n - m$ vecteurs restants au sous-espace $\mathfrak{f}$. Le couple (U, h) est une carte centrée en e compatible avec $\mathcal{H}$. □

Si le sous-groupe $\mathcal{H}$ est fermé (i.e. c'est une sous-variété plongée), on choisit (U, h) de façon que les équations (3) déterminent dans U l'intersection $U \cap a\mathcal{H}$ tout entière.

Problème 4. Utiliser cette affirmation et démontrer que quel que soit le sous-groupe fermé $\mathcal{H}$ du groupe $\mathcal{G}$, l'espace quotient $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ (ensemble des classes $a\mathcal{H}$) possède une structure différentiable naturelle par rapport à laquelle la projection canonique

$$\pi: \mathcal{G} \to \mathcal{G}/\mathcal{H}, \quad a \mapsto a\mathcal{H}, \quad a \in \mathcal{G},$$

est une application différentiable et le triplet $(\mathcal{G}, \pi, \mathcal{G}/\mathcal{H})$ un fibré localement trivial différentiable.

Problème 5. Prouver que

1° pour tout sous-groupe fermé $\mathcal{H}$, la composante de l'unité $\mathcal{H}_e$ est fermée elle aussi;

2° si le groupe de Lie $\mathcal{G}$ est connexe, l'application naturelle

$$\mathcal{G}/\mathcal{H}_e \to \mathcal{G}/\mathcal{H}$$

induite par l'injection des classes modulo le sous-groupe constitue un revêtement.

Problème 6 (qui généralise et commente les problèmes 4 et 5). Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ des sous-groupes fermés du groupe de Lie $\mathcal{G}$, et soit $\mathcal{K}_0$ le sous-groupe invariant le plus grand de $\mathcal{K}$. Démontrer que l'application

$$\pi: \mathcal{G}/\mathcal{K} \to \mathcal{G}/\mathcal{H}$$

induite par l'injection des classes modulo le sous-groupe est différentiable et représente la projection d'un fibré localement trivial différentiable de fibre $\mathcal{H}/\mathcal{K}$ et de groupe structural $\mathcal{H}/\mathcal{K}_0$ qui opère dans $\mathcal{H}/\mathcal{K}$ par translations à gauche.

* * *

Tout sous-groupe abstrait $\mathcal{H}$ peut être en fait transformé en un sous-groupe de Lie. Il suffit de le munir d'une structure de variété 0-dimensionnelle (avec la topologie discrète). On note cependant l'intérêt pratique d'une structure différentiable qui est sans conteste plus significative (et qu'on voudrait unique) dont la topologie est proche au souhait de la topologie induite. (On rappelle que la topologie d'une sous-variété en définit univoquement la structure différentiable; voir leçon III.13.)

Nous dirons que la structure différentiable (topologie) d'une sous-variété $\mathcal{H}$ est *la plus faible* si, pour toute autre structure différentiable sur $\mathcal{H}$, i.e. pour toute sous-variété $\mathcal{H}_1$ ayant les mêmes points, l'identité $\mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}$ est différentiable. Il y a certes unicité pour la structure différentiable la plus faible, mais l'existence n'a pas nécessairement lieu. Si $\mathcal{H}$ admet une structure différentiable qui en fait une sous-variété conservative (en particulier, une sous-variété plongée), cette structure est la plus faible.

Chaque sous-groupe abstrait $\mathcal{H}$ du groupe de Lie $\mathcal{G}$ est évidemment un groupe topologique pour la topologie induite. Soit $\mathcal{H}_e$ la composante connexe par arcs avec unité e du groupe $\mathcal{H}$. Un élément $a \in \mathcal{H}$ appartient par définition à $\mathcal{H}_e$ si et seulement si $\mathcal{G}$ contient un chemin $u : I \to \mathcal{G}$ d'origine e et d'extrémité a complètement dans $\mathcal{H}$ (i.e. un chemin tel que $u(t) \in \mathcal{H}$ pour tout $t \in I$).

Problème 7. Montrer que $\mathcal{H}_e$ constitue un sous-groupe invariant (sous-groupe distingué) de $\mathcal{H}$.

Théorème 2. *Soit $\mathcal{H}$ un sous-groupe abstrait d'un groupe de Lie $\mathcal{G}$. Si le groupe quotient $\mathcal{H}/\mathcal{H}_e$ est dénombrable (ou fini), le sous-groupe $\mathcal{H}$ possède la structure différentiable la plus faible, et il est un sous-groupe de Lie par rapport à cette structure. Les composantes connexes par arcs relatives à cette structure coïncident avec les composantes connexes par arcs pour la topologie induite (i.e. avec les classes $a\mathcal{H}_e$ suivant $\mathcal{H}_e$). En particulier, le sous-groupe $\mathcal{H}_e$ est la composante de l'unité du groupe de Lie $\mathcal{H}$, donc un sous-groupe de Lie connexe du groupe de Lie $\mathcal{G}$.*

On l'appelle d'ordinaire *théorème de Yamabe.*

Le cas général du théorème se ramène aisément au cas particulier d'un sous-groupe connexe par arcs. En effet, si l'on suppose que le résultat est juste pour tel $\mathcal{H}$, on dote $\mathcal{H}_e$, pour tout sous-groupe $\mathcal{H}$, d'une structure de sous-variété connexe qui en fait un sous-groupe de Lie et, partant, une variété intégrale maximale de la distribution $\mathcal{E}(\mathfrak{h})$ correspondante. Chaque classe $a\mathcal{H}_e$, $a \in \mathcal{H}$, est alors une sous-variété intégrale maximale de $\mathcal{E}(\mathfrak{h})$. Comme $\mathcal{H}$ est réunion disjointe des $a\mathcal{H}_e$, cette propriété jointe à la condition « chaque $a\mathcal{H}_e$ est une composante » définit univoquement sur $\mathcal{H}$ une topologie et une structure différentiable. (On note que celle-ci est introduite sans qu'on s'a-

dresse à la propriété de dénombrabilité du groupe quotient $\mathcal{H}/\mathcal{H}_e$.)

Muni de cette structure différentiable, $\mathcal{H}$ est évidemment un sous-groupe de Lie (le vérifier!) avec les composantes de la forme $a\mathcal{H}_e$, $a \in \mathcal{H}$. L'ensemble $\mathcal{H}/\mathcal{H}_e$ de ces composantes est au plus dénombrable par hypothèse, si bien que la structure différentiable définie sur $\mathcal{H}$ est conservative (voir proposition 3 de la leçon 14), donc la plus faible. □

* * *

Ainsi, il suffit de démontrer le théorème de Yamabe pour un sous-groupe $\mathcal{H}$ connexe par arcs. Nous nous servirons à cet effet de sa variante affaiblie connue sous le nom de *théorème de Freudenthal* qui convient parfaitement du point de vue géométrique.

Proposition 2. *Si chaque élément a d'un sous-groupe abstrait $\mathcal{H}$ d'un groupe de Lie $\mathcal{G}$ est joint à e par une courbe différentiable (voir différentiable par morceaux) $u: I \to \mathcal{G}$ entièrement dans $\mathcal{H}$, alors $\mathcal{H}$ possède la structure différentiable la plus faible par rapport à laquelle il est un sous-groupe de Lie connexe.*

On introduit naturellement un sous-ensemble $\mathfrak{h}$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathbf{T}_e\mathcal{G}$, formé de vecteurs $A \in \mathbf{T}_e\mathcal{G}$ tels qu'il existe une courbe différentiable $u: I \to \mathcal{G}$ passant pour $t = 0$ par le point e et tout entière dans $\mathcal{H}$ pour laquelle on a $\dot{u}(0) = A$. (Si $\mathcal{H}$ est un sous-groupe de Lie, on a certes $\mathfrak{h} = \mathfrak{l}(\mathcal{H})$.)

Lemme 4. *Le sous-ensemble $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.*

Démonstration. Si la courbe u passant par e pour $t = 0$ est entièrement contenue dans $\mathcal{H}$, la courbe $t \mapsto u(\lambda t)$ est elle aussi dans $\mathcal{H}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ (et passe par e pour $t = 0$). Le vecteur tangent à cette dernière courbe est λA pour $t = 0$, avec A le vecteur tangent $\dot{u}(0)$ à u. Ainsi, $A \in \mathfrak{h}$ entraîne $\lambda A \in \mathfrak{h}$ quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Si les courbes u et v passant par e pour $t = 0$ sont entièrement dans $\mathcal{H}$, les courbes $t \mapsto u(t)\, v(t)$ et $t \mapsto u(\tau)\, v(\tau)\, u(\tau)^{-1}\, v(\tau)^{-1}$, $\tau = \operatorname{sgn} t \cdot \sqrt{|t|}$, passent de même par ce point pour $t = 0$ et appartiennent à $\mathcal{H}$. D'autre part, leurs vecteurs tangents sont pour $t = 0$ les vecteurs $A + B$ et $[A, B]$, avec $A = \dot{u}(0)$ et $B = \dot{v}(0)$ (voir problème 17 de la leçon 14). Par conséquent, $A, B \in \mathfrak{h}$ entraîne $A + B \in \mathfrak{h}$ et $[A, B] \in \mathfrak{h}$. □

Soit $\mathcal{K}$ un sous-groupe de Lie connexe ayant $\mathfrak{h}$ comme algèbre de Lie. On aura évidemment la proposition 2 si l'on montre que $\mathcal{K} = \mathcal{H}$. On aura besoin de deux autres lemmes.

Soit $A_1, \ldots, A_n$ une base quelconque de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ du groupe de Lie $\mathcal{G}$, et soient $u_1, \ldots, u_n$ des courbes différentiables dans $\mathcal{G}$ telles que $u_i(0) = e$ et $\dot{u}_i(0) = A_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. (Ainsi, $u_i(t) = \exp(tA_i + \ldots)$, les points de suspension désignant les termes de degré $\geqslant 2$ en t).

La formule

$$\varphi(A) = u_1(a^1)\, u_2(a^2) \ldots u_n(a^n), \quad A \in \mathfrak{g},$$

avec $a^1, \ldots, a^n$ les coordonnées du vecteur A dans la base $A_1, \ldots, A_n$ (i.e. des nombres tels que $A = a^1 A_1 + \ldots + a^n A_n$), détermine l'application (manifestement différentiable)

$$(4) \qquad \varphi : U_0 \to \mathcal{G}$$

d'un voisinage U_0 du point 0 de l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$ dans le groupe $\mathcal{G}$. (Si les courbes u_i, $i = 1, \ldots, n$, sont définies pour tout t, alors $U_0 = \mathfrak{g}$.)

Lemme 5. *L'application* (4) *est étale au point* $0 \in \mathfrak{g}$.

Démonstration (cf. celle du lemme 2). Puisque $u_i(t) = \exp(tA_i + \ldots)$, on a selon la formule (12) de la leçon 14

$$\varphi(A) = \exp(a^1 A_1 + \ldots + a^n A_n + \ldots) = \exp(A + \ldots),$$

les points de suspension remplaçant les termes de degré $\geqslant 2$ en $a^1, \ldots, a^n$. Aussi, la différentielle en 0 de (4) coïncide avec la différentielle de l'application exponentielle. C'est donc un isomorphisme. □

Le lemme 5 entraîne que *les nombres* $a^1, \ldots, a^n$ *sont les coordonnées locales sur* $\mathcal{G}$ *centrées en* e.

Les courbes considérées u_i sont d'habitude des sous-groupes à un paramètre $\beta_i : t \mapsto \exp tA_i$, auquel cas $a^1, \ldots, a^n$ sont dites *coordonnées canoniques de deuxième espèce.*

Le second lemme se rapporte à une sous-algèbre $\mathfrak{h}$ quelconque de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ du groupe de Lie $\mathcal{G}$ (considérée comme ensemble de champs de vecteurs invariants à gauche). Comme dans le théorème 2 de la leçon 14, on désigne par $\mathfrak{h}_a$ pour tout point $a \in \mathcal{G}$ le sous-espace de l'espace tangent $\mathbf{T}_a\mathcal{G}$, composé de tous les vecteurs de la forme X_a, $X \in \mathfrak{h}$ étant un champ de vecteurs invariant à gauche sur $\mathcal{G}$. [Si $\mathcal{H}$ est un sous-groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$, alors $\mathfrak{h}_a = \mathbf{T}_a\mathcal{H}$ pour $a \in \mathcal{H}$ (en particulier, $\mathfrak{h} = \mathbf{T}_e\mathcal{H}$), encore que $\mathfrak{h}_a$ soit défini pour $a \notin \mathcal{H}$.] Les champs X étant invariants à gauche, on a de plus pour tout élément $a \in \mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{h}_a = (\mathrm{d}L_a)_e\, \mathbf{T}_e\mathcal{H} = \mathbf{T}_a(a\mathcal{H}).$$

Lemme 6. *Soit* $u : I \to \mathcal{G}$ *une courbe différentiable du groupe de Lie* $\mathcal{G}$ *qui passe pour* $t = 0$ *par le point* e *et jouit de la propriété*

$$(5) \qquad \dot{u}(t) \in \mathfrak{h}_{u(t)} \quad \textit{pour tout } t \in I.$$

Alors $u(t) \in \mathcal{H}$ *quel que soit* $t \in I$ (*i.e. la courbe* u *est contenue entièrement dans le sous-groupe de Lie* $\mathcal{H}$).

Démonstration. Soit C l'ensemble des points $t \in I$ pour lesquels $u(t) \in \mathcal{H}$. Par hypothèse $0 \in C$.

On suppose que $t_0 \in I$ et $a_0 = u(t_0)$. Soit $(U, x^1, \ldots, x^n)$ une carte centrée en a_0 compatible avec le sous-groupe de Lie $\mathcal{K}$. L'application u est continue, si bien qu'on trouve $\delta > 0$ tel que $u(t) \in U$ quand $|t - t_0| < \delta$. Soient $x^i(t)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, des fonctions qui définissent dans $(U, x^1, \ldots, x^n)$ la restriction de u à l'intervalle $|t - t_0| < \delta$. Puisque le voisinage V_a de tout point $a \in U$ est défini dans la sous-variété $a\mathcal{H}$ par les équations de la forme

$$x^{m+1} = \text{const}, \ \ldots, \ x^n = \text{const},$$

le sous-espace $\mathfrak{h}_a = \mathrm{T}_a(a\mathcal{K})$ de l'espace $\mathrm{T}_a\mathcal{G}$ est engendré par les m premiers vecteurs

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_a, \ \ldots, \ \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_a$$

de la base de coordonnées de $\mathrm{T}_a\mathcal{G}$. Cela signifie en particulier que si $|t - t_0| < \delta$, le vecteur $\dot{u}(t)$ est exprimé par les seuls vecteurs

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_{u(t)}, \ \ldots, \ \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_{u(t)}.$$

Aussi, $\dot{x}^{m+1}(t) = 0, \ \ldots, \ \dot{x}^n(t) = 0$ pour $|t - t_0| < \delta$, donc $x^{m+1}(t) = 0, \ldots, x^n(t) = 0$ pour $|t - t_0| < \delta$ (on rappelle que $x^{m+1}(t_0) = 0, \ldots, x^n(t_0) = 0$ par hypothèse).

Poursuivons. Soit $t_0 \in C$, i.e. a $a_0 \in \mathcal{H}$. Les équations $x^{m+1} = 0, \ldots, x^n = 0$ définissent dans U un voisinage $V \subset U \cap \mathcal{H}$ du point a_0 de $\mathcal{H}$. Lorsque $|t - t_0| < \delta$, on a donc $u(t) \in V \subset \mathcal{H}$, si bien que $t \in C$. Ainsi, t_0 est un point intérieur de l'ensemble C, i.e. C est ouvert, car t_0 est quelconque.

Soit $t_0 \in \bar{C}$, auquel cas $t_0 = \lim t_k \in C$. En particulier, on trouve k_0 tel que $|t_{k_0} - t_0| < \delta$. On a

$$x^{m+1}(t_{k_0}) = 0, \ \ldots, \ x^n(t_{k_0}) = 0.$$

La compatibilité de la carte $(U, x^1, \ldots, x^n)$ et du sous-groupe $\mathcal{H}$ fait que les équations $x^{m+1} = 0, \ldots, x^n = 0$ définissent dans ce cas un voisinage de $u(t_{k_0})$ dans $u(t_{k_0})\mathcal{H}$. Comme $u(t_{k_0}) \in \mathcal{H}$, la classe $u(t_{k_0})\mathcal{H}$ coïncide avec $\mathcal{H}$. Par conséquent, tous les points de U tels que $x^{m+1} = 0, \ldots, x^n = 0$ appartiennent à $\mathcal{H}$. En particulier, $a_0 \in \mathcal{H}$, donc $t_0 \in C$. Cela prouve l'inclusion $\bar{C} \subset C$, i.e. l'ensemble C est fermé.

L'ensemble C étant un sous-ensemble non vide fermé et ouvert à la fois de l'intervalle I coïncide avec I tout entier. Par conséquent, $u(t) \in \mathcal{K}$ quel que soit $t \in I$. □

Ces résultats aidant, on est en mesure de passer à la

D é m o n s t r a t i o n de la proposition 2. Il faut démontrer l'égalité $\mathcal{H} = \mathcal{K}$. On établira d'abord que $\mathcal{H} \subset \mathcal{K}$, puis l'inclusion de sens contraire.

Inclusion $\mathcal{H} \subset \mathcal{K}$. Soit $a \in \mathcal{H}$. Il existe par hypothèse dans $\mathcal{G}$ une courbe différentiable $u : I \to \mathcal{G}$ qui joint e à a et reste tout entière dans $\mathcal{H}$. Pour fixer les idées, on suppose que $I = [0, 1]$. Quel que soit $t \in I$, la courbe

$$v(s) = u(t)^{-1}u(s+t), \quad -t \leqslant s \leqslant 1-t,$$

passe pour $s = 0$ par e et est entièrement dans $\mathcal{H}$. Par définition, $\dot{v}(0)$ appartient donc à $\mathfrak{h}$, ou, plus précisément, $\dot{v}(0) \in \mathfrak{h}_e = \mathrm{T}_e\mathcal{K}$ (vu que $\mathfrak{h}$ est considéré comme ensemble de champs de vecteurs invariants à gauche).

D'autre part,

$$\dot{u}(t) = (\mathrm{d}L_{u(t)})_e\, \dot{v}(0),$$

résultat établi facilement (voir formule (3) de la leçon 14). Par conséquent, $\dot{u}(t) \in (\mathrm{d}L_{u(t)})_e \mathrm{T}_e\mathcal{K} = \mathfrak{h}_{u(t)}$, i.e. la courbe u vérifie la condition (5) du lemme 6, si bien qu'en vertu du lemme, $u(t) \in \mathcal{K}$ pour tout $t \in I$. En particulier, $u(1) \in \mathcal{K}$, i.e. $a \in \mathcal{K}$, donc $\mathcal{H} \subset \mathcal{K}$.

Inclusion $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$. On choisit dans $\mathfrak{h}$ une base $A_1, \ldots, A_m$ (on regarde $\mathfrak{h}$ comme sous-espace de $\mathrm{T}_e\mathcal{G}$). Soient $u_1, \ldots, u_m$ les courbes correspondantes de $\mathcal{G}$ (courbes entièrement contenues dans $\mathcal{H}$ pour lesquelles $u_i(0) = e$ et $\dot{u}_i(0) = A_i$, $i = 1, \ldots, m$). Comme $\mathcal{H} \subset \mathcal{K}$, on assimile ces courbes à celles du groupe de Lie $\mathcal{K}$. (*Question* : Pourquoi $u_1, \ldots, u_m$ considérés comme courbes dans $\mathcal{K}$ sont-elles différentiables ?) Soit φ l'application (4) construite à l'aide des courbes $u_1, \ldots, u_m$ (i.e. par la formule

$$\varphi(A) = u_1(a^1), \ldots u_m(a^m),$$

avec $A = a^iA_i$ un vecteur de $\mathfrak{h}$ suffisamment proche de 0). Aux termes du lemme 5, il existe un voisinage U_0 de $0 \in \mathfrak{h}$ sur lequel cette application est un difféomorphisme sur un voisinage $U = \varphi U_0$ du point e de $\mathcal{K}$. Le groupe de Lie $\mathcal{K}$ étant connexe par construction est engendré par U (voir problème 12 de la leçon 14). Par ailleurs, toutes les courbes $u_1, \ldots, u_m$ sont dans $\mathcal{H}$, si bien que $U = \varphi U_0 \subset \subset \mathcal{H}$, donc $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$. □

* * *

Avant de passer à la leçon 16, nous allons répondre brièvement à deux questions qu'on se pose tout naturellement à la vue de la correspondance

(6) $\qquad$ un groupe de Lie $\Rightarrow$ son algèbre de Lie.

Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ (de dimension finie) sur $\mathbb{R}$ est-elle nécessairement isomorphe à l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie $\mathcal{G}$? Quelle rela-

tion existe entre deux groupes de Lie dont les algèbres de Lie sont isomorphes ?

Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie de matrices (sous-algèbre de l'algèbre $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$), l'existence de $\mathcal{G}$ est garantie par le théorème 2 de la leçon 14 (et $\mathcal{G}$ est un sous-groupe du groupe de matrices $GL(n; \mathbb{R})$). D'autre part, le *théorème d'Ado* de la théorie des algèbres de Lie affirme que *toute algèbre de Lie de dimension finie est isomorphe à une algèbre de Lie matricielle* (on dit qu'elle admet une représentation matricielle fidèle). On répond donc par l'affirmative à la première question : *pour toute algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *de dimension finie, il existe un groupe de Lie* $\mathcal{G}$ *dont l'algèbre de Lie* $\mathfrak{l}\mathcal{G}$ *est isomorphe à l'algèbre* $\mathfrak{g}$. (Ce fait établi par Elie Cartan s'appelle d'ordinaire *troisième théorème de Lie.*) Mais la démonstration du théorème d'Ado s'avère fort difficile, et les autres techniques employées pour prouver l'existence du groupe $\mathcal{G}$ (on n'en connaît que deux autres pour l'instant) sont à peine plus simples. D'autre part, le théorème de Lie a beau joué un rôle de premier plan en théorie des groupes de Lie, son intérêt d'application moins grand tient à ce que les algèbres de Lie interviennent dans la pratique conjointement avec les groupes de Lie correspondants dont l'existence n'est donc pas à démontrer. Dans ce livre par exemple, le théorème de Lie ne nous sera d'aucune utilité, et nous ne le traiterons pas.

* * *

La réponse à la deuxième question est sensiblement plus simple. Comme nous n'en aurons pas besoin non plus, nous omettrons presque toutes les démonstrations.

Puisque les algèbres de Lie du groupe de Lie $\mathcal{G}$ coïncident avec ses composantes $\mathcal{G}_e$ de l'unité, on estime, sans nuire à la généralité de l'exposé, que tous les groupes de Lie considérés sont connexes.

Définition 1. Deux groupes de Lie $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont dits *localement isomorphes* s'il existe des voisinages de l'unité $U \subset \mathcal{G}$ et $V \subset \mathcal{H}$ et un difféomorphisme $\varphi : U \to V$ tels que quels que soient $a, b \in U$, $ab \in U$, l'élément $\varphi(a)\varphi(b)$ appartienne à V et on ait l'égalité

$$\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab).$$

Il est clair que *les algèbres de Lie des groupes de Lie localement isomorphes sont isomorphes* (par l'application $(d\varphi)_e$).

Inversement, *les groupes de Lie sont localement isomorphes s'il y a isomorphisme de leurs algèbres de Lie.*

[Cela traduit fidèlement l'affirmation de la remarque 1, leçon 14: la multiplication au voisinage de l'unité d'un groupe de Lie est complètement reconstituée à partir de l'opération [,] dans son algèbre de Lie. La démonstration en est omise pour les raisons *loco citato*.]

Ainsi, *les algèbres de Lie de deux groupes de Lie s'identifient* (*=sont isomorphes*) *si et seulement si ces groupes sont localement isomorphes.*

Ce n'est certes pas toute la réponse. On n'a éclairci qu'un seul aspect de la question, savoir quand les groupes de Lie sont localement isomorphes.

* * *

Il se peut que le difféomorphisme φ de la définition 1 soit la restriction à U d'un homomorphisme $\mathcal{G} \to \mathcal{H}$ (noté toujours φ).

Problème 8. Démontrer que dans ce cas l'homomorphisme φ est un revêtement au sens de la définition 1 de la leçon 2. (On rappelle que les groupes $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont supposés connexes.)

On appelle *revêtement de groupe* les homomorphismes $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ qui sont des revêtements. Il est clair que si le voisinage U de l'unité du groupe $\mathcal{G}$ recouvre bien le voisinage V de l'unité de $\mathcal{H}$, la restriction de φ à U constitue un difféomorphisme $U \to V$ qui présente les propriétés énumérées dans la définition 1. Ainsi, *pour tout revêtement de groupe* $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$, *les groupes* $\mathcal{G}$ *et* $\mathcal{H}$ *sont localement isomorphes.*

Problème 9. Démontrer qu'*une condition nécessaire et suffisante pour qu'un homomorphisme* $\varphi: \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ *de groupes topologiques soit un revêtement est que le noyau* Ker *de* φ *soit discret.*

Problème 10. Démontrer que *chaque sous-groupe invariant discret* K *d'un groupe topologique* $\mathcal{G}$ *appartient au centre de* $\mathcal{G}$ *(et, partant,* K *est un groupe abélien).* [*Indication.* Soit $a \in \mathcal{G}$, et soient U et V des voisinages de l'unité de $\mathcal{G}$ tels que $U \cap K = \{e\}$ et $VaV^{-1} \subset U$. Dans ce cas, V engendre $\mathcal{G}$ (problème 12 de la leçon 14), et si $a \in K$, alors $VaV^{-1} \subset U \cap K = \{e\}$, i.e. tout élément de V commute avec a.]

Ainsi, *quel que soit le revêtement de groupe* $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$, *le groupe* $\mathcal{H}$ *est isomorphe au groupe quotient de* $\mathcal{G}$ *par un sous-groupe invariant commutatif du centre.*

* * *

On a les résultats suivants:

A. *Il existe pour tout groupe de Lie connexe* $\mathcal{G}$ *un revêtement de groupe* $\varphi : \tilde{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}$, $\tilde{\mathcal{G}}$ *étant simplement connexe.*

B. *Si deux groupes de Lie connexes* $\mathcal{G}$ *et* $\mathcal{H}$ *sont localement isomorphes et que* $\mathcal{G}$ *soit simplement connexe, on trouve un revêtement de groupe* $\mathcal{G} \to \mathcal{H}$, *extension du difféomorphisme* φ *de la définition* 1.

Problème 11. Démontrer que *le groupe* $\tilde{\mathcal{G}}$ *de* **A** *est unique à un isomorphisme près.*

C'est le *groupe de revêtement universel* du groupe de Lie $\mathcal{G}$. Il est localement isomorphe à ce dernier, si bien que deux groupes de Lie connexes $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ admettant des revêtements universels isomorphes sont localement isomorphes.

Inversement, si $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont localement isomorphes, $\mathcal{H}$ l'est au revêtement universel $\tilde{\mathcal{G}}$, et il existe donc selon **B** un revêtement de groupe $\tilde{\mathcal{G}} \to \mathcal{H}$, i.e. $\tilde{\mathcal{G}}$ est un revêtement universel de $\mathcal{H}$ aussi.

Ainsi, *les groupes de Lie connexes sont localement isomorphes si et seulement s'il y a isomorphisme entre leurs groupes de revêtement universel.*

En bref, on a le

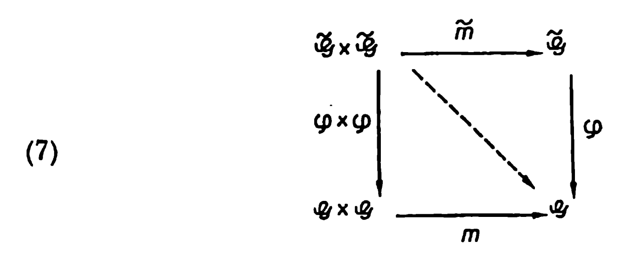
Théorème 3. *La correspondance* (6) *entre les groupes de Lie connexes et simplement connexes (considérés à un isomorphisme près) et les algèbres de Lie réelles de dimension finie est biunivoque.*

Deux groupes de Lie connexes admettent des algèbres de Lie isomorphes si et seulement si leurs groupes de revêtement universel sont isomorphes.

De deux affirmations à la base du théorème, nous démontrerons A parce que la plus simple. (L'idée de la démonstration de B est simple elle aussi, mais sa mise en œuvre rigoureuse s'avère trop laborieuse.)

Dire que $\varphi : \tilde{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}$ est un homomorphisme, c'est affirmer la commutativité du diagramme

(7)



où les flèches horizontales représentent la multiplication dans $\tilde{\mathcal{G}}$ et $\mathcal{G}$ respectivement. D'autre part, la commutativité de (7) signifie par définition que la multiplication $\tilde{m}$ est un relèvement en $\tilde{\mathcal{G}}$ de l'application

$$m \circ (\varphi \times \varphi) : \tilde{\mathcal{G}} \times \tilde{\mathcal{G}} \to \mathcal{G} \tag{8}$$

(flèche en traits ponctués du diagramme (7)). Ainsi, *pour tout revêtement de groupe* $\varphi : \tilde{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}$, *la multiplication* $\tilde{m}$ *est un relèvement de l'application* (8). Ce relèvement vérifie l'égalité $\tilde{m}(\tilde{e}, \tilde{e}) = \tilde{e}$ ($\tilde{e}$ étant l'unité du groupe $\tilde{\mathcal{G}}$) qui le définit de façon unique.

On montre de même que l'application $\tilde{\nu} : \tilde{a} \mapsto \tilde{a}^{-1}$ du groupe $\tilde{\mathcal{G}}$ sur lui-même constitue le relèvement défini par $\tilde{\nu}(\tilde{e}) = \tilde{e}$ de

$$\nu \circ \varphi : \tilde{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}, \tag{9}$$

avec $\nu : a \mapsto a^{-1}$, $a \in \mathcal{G}$.

Inversement, supposons qu'il existe, pour un revêtement (qui n'est pas un revêtement de groupe) différentiable $\varphi : \tilde{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}$ du

groupe de Lie $\mathcal{G}$, les relèvements $\tilde{m}$ et $\tilde{\nu}$ (définis par $\tilde{m}(\tilde{e}, \tilde{e}) = \tilde{e}$ et $\tilde{\nu}(\tilde{e}) = \tilde{e}$, avec $\tilde{e}$ un point de $\varphi^{-1}(e)$) des applications (8) et (9) respectivement.

Problème 12. Démontrer la différentiabilité de $\tilde{m}$ et $\tilde{\nu}$.

Examinons les applications

$$f,\ g : \tilde{\mathcal{G}} \times \tilde{\mathcal{G}} \times \tilde{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}$$

définies par

$$f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3) = \tilde{m}(\tilde{m}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2), \tilde{a}_3)$$

et

$$g(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3) = \tilde{m}(a_1, \tilde{m}(a_2, a_3))$$

respectivement. f et g sont évidemment les relèvements de la même application

$$\tilde{\mathcal{G}} \times \tilde{\mathcal{G}} \times \tilde{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}, \quad (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3) \mapsto a_1 a_2 a_3,$$

$a_i = \varphi(\tilde{a}_i)$, $i = 1, 2, 3$, avec la même condition initiale $(\tilde{e}, \tilde{e}, \tilde{e}) \mapsto \tilde{e}$. L'unicité des relèvements (voir théorème 1 de la leçon 4) fait coïncider ces applications. Ainsi, la multiplication $\tilde{m}$ est associative.

On démontre de façon analogue que $\tilde{\nu}$ est le passage à l'élément inverse pour la multiplication $\tilde{m}$, si bien que la variété $\tilde{\mathcal{G}}$ est un groupe de Lie (avec $\tilde{e}$ pour unité) et $\varphi : \tilde{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}$ un revêtement de groupe pour $\tilde{m}$.

D'autre part, on sait (voir théorème 1 de la leçon 4) que l'existence des relèvements $\tilde{m}$ et $\tilde{\nu}$ a lieu sous la condition nécessaire et suffisante :

$$(m \circ (\varphi \times \varphi))_* (\pi_1(\tilde{\mathcal{G}} \times \tilde{\mathcal{G}})) \subset \varphi_* (\pi_1 \tilde{\mathcal{G}}), \tag{10}$$

$$(\nu \circ \varphi)_* (\pi_1 \tilde{\mathcal{G}}) \subset \varphi_* (\pi_1 \tilde{\mathcal{G}}), \tag{11}$$

où $\pi_1(\tilde{\mathcal{G}} \times \tilde{\mathcal{G}}) = \pi_1(\tilde{\mathcal{G}} \times \tilde{\mathcal{G}}, (\tilde{e}, \tilde{e}))$ et $\pi_1 \tilde{\mathcal{G}} = \pi_1(\tilde{\mathcal{G}}, \tilde{e})$.

Cela nous permet de démontrer le résultat fondamental suivant.

Proposition 3. *Soit $\varphi : \tilde{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}$ un revêtement différentiable quelconque d'un groupe de Lie connexe $\mathcal{G}$ avec unité e, et soit $\tilde{e} \in \varphi^{-1}(e)$. $\tilde{\mathcal{G}}$ est muni d'une multiplication unique avec unité $\tilde{e}$ qui fait de $\tilde{\mathcal{G}}$ un groupe de Lie et de l'application φ un revêtement de groupe.*

D é m o n s t r a t i o n. A la lumière des résultats obtenus ci-dessus, il suffit de démontrer les inclusions (10) et (11).

Problème 13. Vérifier que quels que soient les lacets u, $v: I \to \mathcal{G}$ au point e, la formule

$$(12)\quad F(t, \tau)= \begin{cases} u\left(\frac{t}{1-t}(1-t+2\tau t)\right) v(t(1-2\tau)) & \text{si } 0\leqslant t,\ \tau\leqslant 1/2, \\ u(t+2\tau(1-t))\, v\left(\frac{(1-2\tau)\,t^2+2\tau(2t-1)}{t}\right) & \text{si } 0\leqslant\tau\leqslant 1/2\leqslant t\leqslant 1, \\ u\left(\frac{2t}{1-t}(t+\tau-2\tau t)\right) & \text{si } 0\leqslant t\leqslant 1/2\leqslant\tau\leqslant 1, \\ v\left(\frac{2t-1}{t}(2-t-2\tau(1-t))\right) & \text{si } 1/2\leqslant t,\ \tau\leqslant 1, \end{cases}$$

définit bien une homotopie dans $\mathcal{G}$ qui relie le lacet

$$(13)\qquad t \mapsto u(t)\, v(t), \quad t\in I,$$

au lacet $uv : T \mapsto \mathcal{G}$ défini par

$$uv(t)= \begin{cases} u(2t) & \text{si } 0\leqslant t\leqslant 1/2, \\ v(2t-1) & \text{si } 1/2\leqslant t\leqslant 1. \end{cases}$$

Problème 14. Trouver la construction géométrique élémentaire à la base de la formule (12).

Si $v = \nu \circ u$ (i.e. $v(t) = u^{-1}(t)$), le lacet (13) est un lacet constant, si bien que $[u]\cdot[v] = 1$ dans le groupe $\pi_1\mathcal{G}$. Etant donné que $[v] = \nu_*[u]$, cela prouve que *l'homomorphisme*

$$\nu_* : \pi_1\mathcal{G}\to \pi_1\mathcal{G}$$

est l'application $\alpha \mapsto \alpha^{-1}$ *dans* $\pi_1\mathcal{G}$.

Il en résulte en particulier que l'homomorphisme ν_* transforme tout sous-groupe de $\pi_1\mathcal{G}$ en lui-même. S'agissant du sous-groupe $\varphi_*(\pi_1\mathcal{G})$, on a immédiatement l'inclusion (11) par suite de l'égalité $(\nu\circ\varphi)_* = \nu_*\circ\varphi_*$.

Tout lacet $w: I\to \mathcal{G}\times\mathcal{G}$ du groupe $\mathcal{G}\times\mathcal{G}$ est donné par

$$w(t) = (u(t), v(t)), \quad t\in I,$$

avec $u: I\to\mathcal{G}$, $v: I\to\mathcal{G}$ des lacets de $\mathcal{G}$.

Problème 15. Montrer que *la formule*

$$\Delta[w] = ([u], [v])$$

définit bien l'isomorphisme

$$\Delta: \pi_1(\mathcal{G}\times\mathcal{G})\to \pi_1\mathcal{G}\times\pi_1\mathcal{G}.$$

(Il ne nous faut d'ailleurs que le cas où Δ est un homomorphisme.)

Le problème 13 implique le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathcal{G}\times\mathcal{G}) & \xrightarrow{m_*} & \pi_1\mathcal{G} \\ \Delta\downarrow & & \| \\ \pi_1\mathcal{G}\times\pi_1\mathcal{G} & \xrightarrow{\mu} & \pi_1\mathcal{G} \end{array} \qquad (14)$$

avec μ la multiplication dans le groupe $\pi_1\mathcal{G}$. Aussi,

$$(m\circ(\varphi\times\varphi))_* = m_*\circ(\varphi\times\varphi)_* = \mu\circ\Delta\circ(\varphi\times\varphi)_*.$$

D'autre part, si $w : I\to\tilde{\mathcal{G}}\times\tilde{\mathcal{G}}$ est un lacet de $\tilde{\mathcal{G}}\times\tilde{\mathcal{G}}$ et si $w(t) = u(t)\,v(t)$, où $u, v : I\to\tilde{\mathcal{G}}$ sont des lacets de $\tilde{\mathcal{G}}$, on a

$$((\varphi\times\varphi)\circ w)(t) = ((\varphi\circ u)(t),\ (\varphi\circ v)(t)),\quad t\in I,$$

donc

$$(\Delta\circ(\varphi\times\varphi)_*)[w] = (\varphi_*[u],\ \varphi_*[v]).$$

D'où

$$(m\circ(\varphi\times\varphi))_*[w] = \varphi_*([u])\cdot\varphi_*([v]) = \varphi([u]\cdot[v])\in\varphi_*(\pi_1\tilde{\mathcal{G}})$$

parce que φ_* est un homomorphisme. L'inclusion (10) se trouve démontrée elle aussi. □

Si l'on applique la proposition 3 au revêtement universel $\varphi : \tilde{\mathcal{G}}\to\mathcal{G}$ (qui existe en vertu du théorème général 1 de la leçon 5), on obtient l'affirmation A.

Remarque 1. La commutativité du diagramme (14) signifie que *la multiplication dans le groupe $\pi_1\mathcal{G}$ est induite par celle du groupe $\mathcal{G}$.*

LEÇON 16

Connexions sur les fibrés des repères. — Comparaison avec les connexions sur les fibrés vectoriels. — Construction explicite d'une connexion sur un fibré vectoriel. — Fibrés principaux différentiables. — Champs verticaux fondamentaux. — Formes horizontales. — Formes différentielles à valeurs vectorielles.

On rappelle (voir exemple 3 de la leçon 6) que chaque fibré vectoriel $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ est associé au *fibré* principal *des repères* $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ dont l'espace total $\mathscr{E}$ est formé de repères (bases)

(1) $$\mathrm{p} = (p_1, \ldots, p_n),$$

avec $p_1, \ldots, p_n$ les vecteurs linéairement indépendants (qui constituent donc une base) d'une fibre $\mathscr{F}_b$ de ξ. Cela posé, $\pi(\mathrm{p}) = b$.

Si le fibré $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ est différentiable, on définit dans $\mathscr{E}$ les cartes $(\mathscr{E}_U, h)$, où U est le voisinage de coordonnées trivialisant dans $\mathscr{B}$ et h l'application de l'ensemble $\mathscr{E}_U = \pi^{-1}U$ dans $\mathbb{R}^{n^2+m} = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^m$, définie par la formule

(2) $$h(\mathrm{p}) = (C, h(b)), \quad \mathrm{p} = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathscr{E}, \quad b = \pi(\mathrm{p}).$$

Ici $h : U \to \mathbb{R}^m$ est l'application de coordonnées de U et C une matrice dont les éléments des colonnes sont les composantes des vecteurs $p_1, \ldots, p_n$ dans la base trivialisante $\mathrm{s}(b) = (s_1(b), \ldots, s_n(b))$ de la fibre $\mathscr{F}_b$. (L'espace des matrices carrées d'ordre n s'identifie ici avec l'espace $\mathbb{R}^{n^2}$.)

Les coordonnées locales de $\mathrm{p} \in \mathscr{E}_U$ dans la carte $(\mathscr{E}_U, h)$ sont les nombres c_i^j, x^k, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $1 \leqslant k \leqslant m$, avec x^k les coordonnées locales du point $b = \pi(\mathrm{p})$ dans la carte (U, h) de la variété $\mathscr{B}$ et c_i^j les éléments de la matrice C, i.e. des nombres tels que

$$p_i = c_i^j s_j(b)$$

pour tout $i = 1, \ldots, n$. (On note la non-dégénérescence de C.)

Ainsi, les coordonnées du point p forment le couple (C, x), C étant la matrice $\| c_i^j \|$ et x la ligne $(x^1, \ldots, x^m)$.

On conçoit que toutes les cartes $(\mathscr{E}_U, h)$ sont compatibles, si bien qu'elles définissent sur $\mathscr{E}$ une structure de variété différentiable de dimension $n^2 + m$, et l'application π envoie le point $\mathrm{p} \in \mathscr{E}$ de coordonnées (C, x) dans le point $b \in \mathscr{B}$ de coordonnées x (c'est donc une submersion). Cela signifie que *le fibré des repères* $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ *est différentiable dès qu'il en est ainsi pour le fibré vectoriel* $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$.

On voit en particulier que la fibre $\mathcal{F}^{\xi}_{b} = \pi^{-1}(b)$ de ξ est une sous-variété plongée pour tout point b de $\mathscr{B}$ et que tous les résultats relatifs aux sous-espaces verticaux et horizontaux (voir leçon 10) s'appliquent automatiquement au fibré ξ.

Problème 1. Montrer que *pour tout champ*

(3) $$H : \mathrm{p} \mapsto H_{\mathrm{p}}, \quad \mathrm{p} \in \mathscr{E},$$

de sous-espaces horizontaux sur ξ, *il existe dans chaque carte* $(\mathscr{E}_U, h)$ *des formes univoquement définies*

(4) $$\theta^i_j = \mathrm{d}c^i_j + f^i_{jk}\,\mathrm{d}x^k, \quad 1 \leqslant i, \ j \leqslant n$$

(*avec* f^i_{jk} *des fonctions sur le voisinage de coordonnées* $\mathscr{E}_U$ *qui sont différentiables s'il en est de même du champ* H) *telles que le sous-espace* H_{p} *soit pour tout* $\mathrm{p} \in \mathscr{E}_U$ *l'annulateur des covecteurs* $(\theta^i_j)_{\mathrm{p}}$. [*Indication.* Cf. proposition 3 de la leçon 10.]

Les coordonnées locales (C, x) de $(\mathscr{E}_U, h)$ définissent dans chaque espace tangent $\mathrm{T}_{\mathrm{p}}\mathscr{E}$, $\mathrm{p} \in \mathscr{E}_U$, la base

$$\left(\frac{\partial}{\partial c^i_j}\right)_{\mathrm{p}}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_{\mathrm{p}}, \quad 1 \leqslant i, \ j \leqslant n, \ 1 \leqslant k \leqslant m,$$

si bien que chaque vecteur de $\mathrm{T}_{\mathrm{p}}\mathscr{E}$ est représenté de façon unique par

$$a^i_j \left(\frac{\partial}{\partial c^i_j}\right)_{\mathrm{p}} + u^k \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_{\mathrm{p}}, \quad \text{où } a^i_j, \ u^k \in \mathbb{R}.$$

On identifie ce vecteur au couple (A, u), où A est la matrice $\| a^i_j \|$ et u la ligne $(u^1, \ldots, u^m)$. Le vecteur (A, u) est vertical si et seulement si $\mathrm{u} = 0$.

Les valeurs des formes (4) sur (A, u) forment évidemment la matrice

$$A + u^k F_k,$$

avec $F_k = F_k(C, \mathrm{x})$ les matrices $\| f^i_{jk} \|$, $k = 1, \ldots, m$. Aussi, $(A, \mathrm{u}) \in H_{\mathrm{p}}$ si et seulement si

(5) $$A + u^k F_k = 0.$$

Il en résulte en particulier que

(6) $$(A, \mathrm{u})^V = (A + u^k F_k, 0), \quad (A, \mathrm{u})^H = (-u^k F_k, \mathrm{u})$$

pour tout vecteur (A, u) de $\mathrm{T}_{\mathrm{p}}\mathscr{E}$.

Chaque fibre $\mathcal{F}^{\xi}_{b_0}$, $b_0 \in \mathscr{B}$, de ξ est l'orbite de l'action à droite

$$(\mathrm{p}, B) \mapsto \mathrm{p}B, \quad \mathrm{p} \in \mathscr{E}, \quad B \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{R}),$$

du groupe $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ sur $\mathscr{E}$ qui est définie par

$$\mathrm{p}B = \mathrm{q}, \quad \mathrm{q} = (q_1, \ldots, q_n),$$

où

$$q_i = p_j b_i^j, \quad i = 1, \ldots, n,$$

pour $\mathrm{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ et $B = \| b_i^j \|$. Cette action s'écrit en coordonnées

(7) $$(C, \mathbf{x}) \mapsto (CB, \mathbf{x}).$$

Il s'agit donc d'une action différentiable. En particulier, l'application

$$R_B : \mathscr{E} \to \mathscr{E}, \quad \mathrm{p} \mapsto \mathrm{p}B, \quad \mathrm{p} \in \mathscr{E},$$

de la variété $\mathscr{E}$ dans elle-même est un difféomorphisme pour tout $B \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$.

Comme R_B transforme chaque fibre $\mathscr{F}_{b_0}^{\xi}$ en elle-même, la différentielle

$$(\mathrm{d}R_B)_\mathrm{p} : \mathrm{T}_\mathrm{p}\mathscr{E} \to \mathrm{T}_{\mathrm{p}B}\mathscr{E}$$

en chaque point $\mathrm{p} \in \mathscr{F}_{b_0}^{\xi}$ envoie le sous-espace vertical $\mathrm{T}_\mathrm{p}\mathscr{F}_{b_0}^{\xi}$ dans le sous-espace vertical $\mathrm{T}_{\mathrm{p}B}\mathscr{F}_{b_0}^{\xi}$. Aussi, quels que soient le champ H de sous-espaces horizontaux, le point $\mathrm{p} \in \mathscr{E}$ et l'élément $B \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$, l'application $(\mathrm{d}R_B)_\mathrm{p}$ change le sous-espace horizontal H_p en le sous-espace $(\mathrm{d}R_B)_\mathrm{p} H_\mathrm{p}$ supplémentaire de $\mathrm{T}_{\mathrm{p}B}\mathscr{F}_{b_0}^{\xi}$. Si

(8) $$(\mathrm{d}R_B)_\mathrm{p} H_\mathrm{p} = H_{\mathrm{p}B},$$

le champ H est dit *équivariant*.

Définition 1. On appelle *connexion* sur le fibré principal $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ un champ H équivariant et différentiable quelconque de sous-espaces horizontaux.

On note que cette définition se passe des voisinages de coordonnées trivialisants à la différence des connexions sur les fibrés vectoriels ξ.

* * *

Proposition 1. *Les connexions H sur le fibré principal ξ sont en correspondance biunivoque naturelle avec les connexions H sur le fibré vectoriel associé $\xi = \xi\,[\mathbb{R}^n]$.*

D é m o n s t r a t i o n. Selon (7), si le point p de $\mathscr{E}_U$ est repéré par les coordonnées $(C, \mathbf{x})$, alors le point $\mathrm{q} = R_B\mathrm{p}$ l'est par $(CB, \mathbf{x})$.

Problème 2. En déduire que l'application linéaire $(\mathrm{d}R_B)_\mathrm{p}$ est définie par la formule

$$(\mathrm{d}R_B)_\mathrm{p}(A, \mathbf{u}) = (AB, \mathbf{u}), \quad (A, \mathbf{u}) \in \mathrm{T}_\mathrm{p}\mathscr{E}.$$

Il en résulte par (5) que si le champ H est l'annulateur des formes (4) sur $\mathscr{E}_U$, le sous-espace $(\mathrm{d}R_B)_\mathrm{p} H_\mathrm{p}$ a pour éléments les vecteurs $(AB, \mathbf{u})$, u étant un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^m$, et

$$A = -F_k(C, \mathbf{x})\, u^k.$$

D'autre part, le point $q = R_B p$ a pour coordonnées (CB, x), si bien que la même formule (5) fait que le sous-espace H_q est formé des vecteurs ($-F_k$ (CB, x) u^k, u). Le champ H de sous-espaces horizontaux est donc équivariant (i.e. il est une connexion) si et seulement si tous les éléments B, C du groupe GL (n ; $\mathbb{R}$) et tous les vecteurs x, u $\in \mathbb{R}^m$ vérifient l'égalité

$$-F_k(C, \mathrm{x})\, Bu^k = -F_k(CB, \mathrm{x})\, u^k.$$

Comme u est quelconque, cette égalité a lieu si et seulement si

(9) $\quad F_k(C, \mathrm{x})\, B = F_k(CB, \mathrm{x})$ pour tout $k = 1, \ldots, m$.

On pose $C = E$ et on note C la matrice B, il vient de suite

(10) $\quad F_k(C, \mathrm{x}) = \Gamma_k C, \quad k = 1, \ldots, m,$

(où $\Gamma_k = \Gamma_k$ (x) est la matrice F_k (E, x)), i.e.

$$f^i_{jk} = \Gamma^i_{ks} c^s_j, \quad \| \Gamma^i_{ks} \| = \Gamma_k.$$

Puisque les matrices (10) satisfont pour Γ_k quelconques aux relations (9), on peut donc dire que *le champ H est une connexion sur* ξ *si et seulement s'il constitue sur chaque voisinage de coordonnées* $\mathscr{E}_U$ *l'annulateur des formes*

(11) $$\theta^i_j = dc^i_j + \Gamma^i_{ks} c^s_j\, dx^k,$$

avec Γ^i_{ks} *des fonctions différentiables sur le voisinage U.*

Problème 3. Montrer que les fonctions Γ^i_{kj} vérifient les relations (17) de la leçon 10 et qu'elles sont donc les coefficients d'une connexion H sur le fibré vectoriel ξ.

Connaissant la connexion H sur ξ on a donc construit une connexion H sur ξ. Inversement, si H est une connexion arbitraire sur ξ, on reconstitue par ses coefficients Γ^i_{kj} les formes (11) et, partant, une connexion H_U pour chaque voisinage de coordonnées $\mathscr{E}_U$.

Problème 4. Montrer la compatibilité des connexions H_U sur les intersections $\mathscr{E}_U \cap \mathscr{E}_{U'}$, ce qui fait que H_U définissent la connexion H sur $\mathscr{E}$ tout entier.

Cela démontre manifestement la proposition 1. □

Chemin faisant, on a démontré que *sur chaque voisinage de coordonnées* $\mathscr{E}_U$ *les connexions sur* ξ *sont données par les formes* (11). On peut certes substituer à (11) les formes linéairement équivalentes

(12) $$\theta^i_j = {}'c^i_t\, dc^t_j + {}'c^i_t \Gamma^t_{sk} c^s_j\, dx^k, \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

où ${}'c^i_j$ sont les éléments de la matrice C^{-1} inverse de $C = \| c^i_j \|$. (On n'aura plus besoin des formes (11), si bien qu'on leur emprunte les symboles θ^i_j.) La matrice $\theta = \| \theta^i_j \|$ des formes (12) s'écrit par convention

(12′) $$\theta = C^{-1} dC + C^{-1} \omega C,$$

où $dC = \| dc_j^i \|$, $\omega = \| \omega_j^i \| = \| \Gamma_{kj}^i \, dx^k \|$. La connexion est définie sur tout autre voisinage de coordonnées trivialisant U' par les formes $\theta_{j'}^{i'}$, éléments de la matrice

$$\theta' = C'^{-1}\, dC' + C'^{-1}\omega' C'.$$

Ce faisant, si $\varphi = \varphi_{\beta\alpha}$ est l'application de transition correspondante, on a sur $U \cap U'$

$$\omega' = \varphi^{-1}\omega\varphi + \varphi'\, d\varphi$$

(voir formule (17″) de la leçon 10) et

$$C' = \varphi^{-1}C$$

(démontrer!). Aussi

$$\begin{aligned}\theta' = C^{-1}\varphi\, d(\varphi^{-1}C) + C^{-1}\varphi(\varphi^{-1}\omega\varphi + \varphi^{-1}\, d\varphi)\varphi^{-1}C =\\ = C^{-1}\varphi(d\varphi^{-1})C + C^{-1}(\varphi\varphi^{-1})\, dC + C^{-1}\omega C + C^{-1}\, d\varphi\varphi^{-1}C =\\ = -C^{-1}\varphi(\varphi^{-1}\, d\varphi\varphi^{-1})C + C^{-1}\, dC + C^{-1}\omega C + C^{-1}\, d\varphi\varphi^{-1}C =\\ = C^{-1}\, dC + C^{-1}\omega C = \theta\end{aligned}$$

sur $U \cap U'$ (il est connu que $d\varphi^{-1} = -\varphi^{-1}d\varphi\, \varphi^{-1}$). Ainsi, les formes (12) sont compatibles sur les intersections, et il s'agit donc des formes globales θ_j^i définies sur la variété $\mathscr{E}$ tout entière. On voit que *toute connexion sur* ξ *est l'annulateur des formes* θ_j^i, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, *définies sur toute la variété* $\mathscr{E}$ (qui sont de la forme (12) dans chaque carte $(\mathscr{E}_U, h)$). Cette propriété avantage heureusement les connexions sur ξ par rapport aux connexions sur ξ pour lesquelles les formes analogues θ^i, $1 \leqslant i \leqslant n$, ne sont définies que localement.

* * *

La démonstration ci-dessus de la proposition 1 néglige cependant la construction géométrique de H moyennant H. Si l'on corrige ce défaut, on démontre une fois de plus la proposition en question.

Les composantes $p_1, \ldots, p_n$ d'un point $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ quelconque de $\mathscr{E}$ appartiennent par définition à une seule fibre $\mathscr{F}_b$ de ξ, si bien qu'on définit pour tout vecteur $\mathbf{y} = (y^1, \ldots, y^n) \in \mathbb{R}^n$ le point $p_i y^i \in \mathscr{F}_b$. Ainsi, la formule

$$f_{\mathbf{y}}(\mathbf{p}) = p_i y^i, \quad \mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n), \quad \mathbf{y} = (y^1, \ldots, y^n),$$

détermine l'application

$$f_{\mathbf{y}} : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$$

(évidemment différentiable). Soit

$$(df_{\mathbf{y}})_{\mathbf{p}} : \mathrm{T}_{\mathbf{p}}\mathscr{E} \to \mathrm{T}_p\mathscr{E}, \quad p = p_i y^i,$$

sa différentielle en $\mathbf{p} \in \mathscr{E}$.

Proposition 2. *Etant donné une connexion H quelconque sur* ξ, *la formule*

(13) $$H_p = (df_y)_p H_p, \quad p = f_y\ (p),$$

définit bien une connexion H sur ξ.

D é m o n s t r a t i o n. On commence par prouver que le second membre de (13) dépend de p seul. On démontre donc que si

(14) $$f_y\ (p) = f_z(q), \quad y, z \in \mathbb{R}^n, \quad p, q \in \mathscr{E},$$

alors

$$(df_y)_p H_p = (df_z)_q H_q.$$

L'égalité (14) n'a évidemment lieu que lorsque p et q appartiennent à une même fibre de ξ, si bien que le groupe GL $(n; \mathbb{R})$ comprend un élément $B = \| b_i^j \|$ tel que q $=$ pB, i.e. $q_i = p_j b_i^j$, auquel cas

$$f_z\ (q) = q_i z^i = p_j b_i^j z^i, \quad z = (z^1, \ldots, z^n),$$

et (13) signifie (n'oublions pas que les vecteurs $p_1, \ldots, p_n$ de l'espace $\mathscr{F}_b$ sont supposés linéairement indépendants) que $y^j = b_i^j z^i$, i.e. y $= B$z, avec y et z considérés comme colonnes. Par conséquent, l'égalité (14) se récrit

$$f_{Bz}\ (p) = (f_z \circ R_B)\ (p).$$

Il faut noter que c'est une *identité en* p pour tout B et tout z. Aussi, on a pour p donné

(15) $$(df_y)_p = (df_{Bz})_p = (df_z)_q \circ (dR_B)_p, \quad q = pB, \quad y = Bz,$$

d'où le résultat annoncé

$$(df_y)_p H_p = (df_z)_q((dR_B)_p H_p) = (df_z)_q H_q$$

puisque $(dR_B)_p H_p = H_{pB} = H_q$ par suite de l'équivariance.

Problème 5. On rappelle que le vecteur

$$a_i^j \left(\frac{\partial}{\partial c_i^j}\right)_p + u^k \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_p, \quad 1 \leqslant i, \quad j \leqslant n, \quad 1 \leqslant k \leqslant m,$$

de l'espace $T_p\mathscr{E}$ est noté par convention $(A,\ u)$, où $A = \| a_i^j \|$ et u $= (u^1, \ldots$ $\ldots, u^m)$. On désigne de même par (c, u) (c $= (c^1, \ldots, c^n)$, u $= (u^1, \ldots, u^m)$) le vecteur

$$c^i \left(\frac{\partial}{\partial a^i}\right)_p + u^k \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_p, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \quad 1 \leqslant k \leqslant m,$$

de l'espace $T_p\mathscr{E}$. Montrer qu'avec ces notations la différentielle

$$(df_y)_p : T_p\mathscr{E} \to T_p\mathscr{E}, \quad p = f_y(p),$$

de l'application f_y opère par la formule

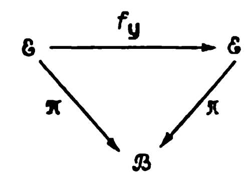
$$(df_y)_p\ (A,\ u) = (A\,y,\ u),$$

y et A y étant considérés comme colonnes. En déduire la formule (14).

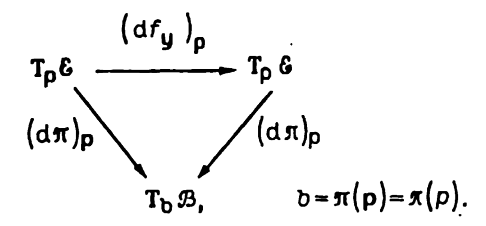
Ainsi, pour toute connexion H sur ξ, la formule (13) définit bien un champ de sous-espaces H_p sur ξ.

Problème 6. Montrer qu'il s'agit d'un champ différentiable.

Il est clair que $\pi \circ f_y = \pi$, i.e. le diagramme



est commutatif (f_y est un morphisme de fibrés). Le diagramme des différentielles



est donc commutatif lui aussi pour n'importe quels points $p \in \mathcal{E}$ et $y \in \mathbb{R}^n$.

Problème 7. En déduire que H est un champ de sous-espaces horizontaux.

Il nous reste, pour achever la démonstration, à établir que le champ H est défini par les formes qui dépendent linéairement des coordonnées dans une fibre. On doit donc calculer H en coordonnées (ce qui fournit en particulier la solution des problèmes 6 et 7).

On suppose une fois de plus que U est un voisinage de coordonnées trivialisant dans la variété $\mathcal{B}$.

On estime (sans nuire à la généralité) que le sous-espace H_p est défini pour les points $p \in \mathcal{E}_U$ par

$$H_p = (df_a)_{p_0} H_{p_0},$$

où $p_0 = s(b)$, $b = \pi(p)$ (et a est par conséquent la colonne des coordonnées de p dans la base $s_1(b), \ldots, s_n(b)$ de la fibre $\mathcal{F}_b$). Vu que $(d\pi)_{p_0}$ sur H_{p_0} est un isomorphisme sur $T_b\mathcal{B}$, la base du sous-espace H_{p_0} s'écrit

(16) $$(A_1, e_1), \ldots, (A_m, e_m),$$

et la base de H_p est

$$(A_1c, e_1), \ldots, (A_mc, e_m),$$

où

$$A_1 = \| a^i_{1j} \|, \ \ldots, \ A_m = \| a^i_{mj} \|, \quad 1 \leqslant i, \ j \leqslant n,$$

sont des matrices carrées d'ordre n qui dépendent différentiablement du point $b \in U$.

Soient sur $\mathscr{E}_U$ les formes différentielles (manifestement différentiables)

$$\theta^i = da^i - a^i_{kj} a^j \, dx^k, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Puisque les covecteurs $(da^i)_p$ et $a^i_{kj} a^j (dx^k)_p$ prennent en tout point $p \in \mathscr{E}_U$ une même valeur, savoir $a^i_{kj} c^j$, sur les vecteurs

$$(A_k c, \ e_k) = a^i_{kj} c^j \left(\frac{\partial}{\partial a^j} \right)_p + \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right)_p$$

de l'espace H_p, tous les covecteurs θ^i_p, $p \in \mathscr{E}_U$, sont nuls sur H_p, donc $H_p \subset \operatorname{Ann}(\theta^1_p, \ldots, \theta^n_p)$. Etant donné l'indépendance linéaire évidente de ces covecteurs et $\dim H_p = m$, on a en fait l'égalité et non l'inclusion, i.e.

$$H = \operatorname{Ann}(\theta^1, \ldots, \theta^n) \quad \text{sur } \mathscr{E}_U,$$

et le champ $H : p \mapsto H_p$ est effectivement une connexion (à coefficients $\Gamma^i_{kj} = -a^i_{kj}$). □

Du moment que les vecteurs (16) forment une base du sous-espace H_{p_0}, les vecteurs

$$(A_1 B, \ e_1), \ \ldots, \ (A_m B, \ e_m)$$

constituent pour tout $B \in GL(n; \mathbb{R})$ une base du sous-espace H_p, $p = p_0 A$ (voir problème 2).

Problème 8. Etablir avec ces résultats que le sous-espace H_p est l'annulateur en p des formes

$$\theta^i_j = dc^i_j - a^i_{ks} c^s_j \, dx^k, \quad 1 \leqslant i, \ j \leqslant n.$$

Cela démontre évidemment que la correspondance $H \Rightarrow H$ de la proposition 2 coïncide avec la correspondance de la proposition 1 (et prouve d'une manière nouvelle cette dernière).

Aux termes de la proposition 1, on identifie les connexions sur ξ et celles sur ξ.

Nous avons là plus qu'une autre définition (invariante cette fois!) des connexions sur les fibrés vectoriels. Cela permet de vastes généralisations immédiates.

* * *

On suppose que le groupe de Lie $\mathscr{G}$ opère différentiablement à droite sur la variété différentiable $\mathscr{E}$:

(17) $$\mathscr{E} \times \mathscr{G} \to \mathscr{E}.$$

On fait les hypothèses suivantes:

a) l'espace $\mathscr{B} = \mathscr{E}/\mathscr{G}$ est une variété différentiable;

b) l'application

$$\pi : \mathscr{E} \to \mathscr{B}, \quad \mathrm{p} \mapsto \mathrm{p}\mathscr{G}, \quad \mathrm{p} \in \mathscr{E}, \tag{18}$$

est différentiable;

c) pour un recouvrement ouvert $\{U_\alpha\}$ de l'espace $\mathscr{B}$, il existe des difféomorphismes équivariants (donc fibre à fibre)

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \times \mathscr{G} \to \mathscr{E}_{U_\alpha} = \pi^{-1}(U_\alpha)$$

(qui vérifient $\varphi_\alpha(b, a)\, g = \varphi_\alpha(b, ag)$ quels que soient les points $b \in U_\alpha$ et $a, g \in \mathscr{G}$).

Problème 9. Démontrer que l'action différentiable (17) est une action principale au sens de la définition 2 de la leçon 1 si et seulement si elle jouit des propriétés a), b) et c). (Le plus difficile à établir est certes la propriété d'être localement trivial, i.e. c).)

Nous ne nous proposons pas de nous servir de cette affirmation telle quelle, et, sans chercher loin, nous appellerons *principale* l'action différentiable (17) qui présente les propriétés en question. Le triplet $(\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$, avec π l'application (18), est corrélativement un *$\mathscr{G}$-fibré principal différentiable.* [Ainsi, *chaque fibré principal différentiable est localement trivial* par définition.]

Problème 10. Montrer que *pour tout fibré principal différentiable* ξ *la translation*

$$\tau : \mathscr{E}^* \to \mathscr{G}$$

(voir leçon 1, p. 20) *est une application différentiable.*

Problème 11. Montrer que le fibré des repères examiné ci-dessus est un fibré principal différentiable de groupe structural GL $(n;\ \mathbb{R})$.

En vertu de la condition c), l'application $\pi : \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ est une submersion, si bien que chaque fibré principal différentiable $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ est un fibré différentiable au sens de la leçon 10, et on peut parler en l'occurrence des vecteurs verticaux et des champs différentiables de sous-espaces horizontaux.

* * *

Voyons d'abord ce qu'il en est des vecteurs verticaux.

Un champ vectoriel X sur $\mathscr{E}$ formé de vecteurs verticaux, i.e. un champ tel que le vecteur X_p soit vertical pour tout point $\mathrm{p} \in \mathscr{E}$, sera dit *vertical.*

Pour tout point $\mathrm{p} \in \mathscr{E}$, l'application

$$L_\mathrm{p} : \mathscr{G} \to \mathscr{E}, \quad a \mapsto \mathrm{p}a, \quad a \in \mathscr{G},$$

est évidemment un difféomorphisme du groupe $\mathcal{G}$ sur la fibre $\mathrm{p}\mathcal{G} = \mathcal{F}_b^\xi$, $b = \pi(\mathrm{p})$, du fibré ξ, qui envoie l'unité e de $\mathcal{G}$ en p. Aussi,

$$A_{\mathrm{p}}^{\#} = (dL_{\mathrm{p}})_e A, \quad \mathrm{p} \in \mathscr{E}, \tag{19}$$

définit sur $\mathscr{E}$ pour tout vecteur $A \in \mathfrak{g}$ un champ vectoriel vertical

$$A^{\#} : \mathrm{p} \mapsto A_{\mathrm{p}}^{\#}.$$

Problème 12. Montrer que le champ $A^{\#}$ est différentiable.

Le champ $A^{\#}$ s'appelle *champ vertical fondamental* associé au vecteur $A \in \mathfrak{g}$.

L'application L_{p} étant un difféomorphisme, on a pour $A \neq 0$:

$$A_{\mathrm{p}}^{\#} \neq 0 \text{ en chaque } \mathrm{p} \in \mathscr{E}.$$

On constate en particulier que l'application

$$\# : A \to A^{\#} \tag{20}$$

(évidemment linéaire) constitue un monomorphisme de l'espace vectoriel $\mathfrak{g} = \mathrm{T}_e\mathcal{G}$ dans l'espace vectoriel $\mathfrak{a}\mathscr{E}$ des champs vectoriels sur la variété $\mathscr{E}$.

Problème 13. Montrer que *pour tout vecteur vertical $B \in \mathrm{T}_{\mathrm{p}_0}\mathscr{E}$, il existe un seul élément $A \in \mathfrak{g}$ tel que*

$$A_{\mathrm{p}_0}^{\#} = B.$$

Problème 14. Soit $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ un fibré des repères du fibré vectoriel ξ. Comme les vecteurs tangents en e au groupe $\mathcal{G} = \mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ s'identifient naturellement aux matrices carrées d'ordre n, chaque matrice $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ définit sur l'espace $\mathscr{E}$ un champ vectoriel vertical $A^{\#}$. Montrer que ce champ est donné dans chaque carte $(\mathscr{E}_U, h)$ par l'égalité

$$A_{\mathrm{p}}^{\#} = (AC, 0),$$

avec (C, x) les coordonnées du point p.

On voit aisément que *pour chaque point* $\mathrm{p}_0 \in \mathscr{E}$, *la courbe*

$$\beta : t \mapsto \mathrm{p}_0 \exp tA = R_{\exp tA}\mathrm{p}_0,$$

$-\infty < t < +\infty$, *est une courbe intégrale de $A^{\#}$ qui passe pour $t = 0$ par le point* p_0. En effet, si $t_0 \in \mathbb{R}$, on a

$$\dot\beta(t_0) = (dL_{\beta(t_0)})_e A = A_{\beta(t_0)}^{\#}$$

puisque

$$\beta(t) = \mathrm{p}_0 \exp t_0 A \exp(t - t_0) A =$$
$$= L_{\mathrm{p}_0 \exp t_0 A}(\exp(t - t_0) A) = L_{\beta(t_0)}(\exp(t - t_0) A)$$

et que c'est le vecteur A qui est tangent en t_0 à la courbe $t \mapsto \exp(t - t_0) A$. □

Vu que $[A^\#, X] = \mathfrak{L}_{A^\#} X$ (voir formule (18) de la leçon III.17), il en résulte que

(21) $$[A^\#, X] = \lim_{t\to 0} \frac{R^*_{\exp tA} X - X}{t}$$

pour tout champ vectoriel $X \in \mathfrak{a}\mathscr{X}$. [On rappelle (voir leçon III.17) que le symbole $\varphi^* X$, avec X un champ vectoriel sur la variété différentiable $\mathscr{X}$ et φ un difféomorphisme quelconque $\mathscr{X} \to \mathscr{X}$, désigne le champ vectoriel sur $\mathscr{X}$ défini par la formule $(\varphi^* X)_p = (d\varphi)_p^{-1} X_{\varphi(p)}$, $p \in \mathscr{X}$.]

Soit, en particulier, $X = B^\#$, où $B \in \mathfrak{g}$. On a

$$X_{\mathrm{p} \exp tA} = (dL_{\mathrm{p} \exp tA})_e B,$$

donc

$$(R^*_{\exp tA} X)_{\mathrm{p}} = (dR_{\exp tA})_{\mathrm{p}}^{-1} (dL_{\mathrm{p} \exp tA})_e B = d\,(R^{-1}_{\exp tA} \circ L_{\mathrm{p} \exp tA})_e B.$$

D'autre part,

$$(R^{-1}_{\exp tA} \circ L_{\mathrm{p} \exp tA})\, x = \mathrm{p}\, (\exp tA)\, x\, (\exp(-tA)) =$$
$$= \mathrm{p}\, (\mathrm{int}_{\exp tA}\, x) = (L_{\mathrm{p}} \circ \mathrm{int}_{\exp tA})\, x$$

pour tout point $x \in \mathscr{G}$, si bien que

$$R^{-1}_{\exp tA} \circ L_{\mathrm{p} \exp tA} = L_{\mathrm{p}} \circ \mathrm{int}_{\exp tA}$$

et

$$d\,(R^{-1}_{\exp tA} \circ L_{\mathrm{p} \exp tA})_e = (dL_{\mathrm{p}})_e \circ d\,(\mathrm{int}_{\exp tA})_e =$$
$$= (dL_{\mathrm{p}})_e \circ \mathrm{Ad}\,(\exp tA) = (dL_{\mathrm{p}})_e \circ e^{t\,\mathrm{ad}\,A}$$

(par définition, $\mathrm{Ad}\, a = d\,(\mathrm{int}_a)_e$ pour tout élément $a \in \mathscr{G}$ et $\mathrm{Ad}\, a = e^{\mathrm{ad}\, A}$ lorsque $a = \exp A$; voir formule (17) de la leçon 14).

Par conséquent,

$$(R^*_{\exp tA} B^\#)_{\mathrm{p}} - B^\#_{\mathrm{p}} = [(dL_{\mathrm{p}})_e \circ (e^{t\,\mathrm{ad}\,A} - \mathrm{id})]\, B$$

et, partant (voir formules (21) et (15) de la leçon 14),

$$[A^\#, B^\#]_{\mathrm{p}} = (dL_{\mathrm{p}})_e \lim_{t\to 0} \frac{e^{t\,\mathrm{ad}\,A} - \mathrm{id}}{t} B = (dL_{\mathrm{p}})_e\, (\mathrm{ad}\, A)\, B =$$
$$= (dL_{\mathrm{p}})_e [A, B] = [A, B]^\#_{\mathrm{p}}.$$

Cela signifie que

(22) $$[A^\#, B^\#] = [A, B]^\#$$

pour n'importe quels vecteurs $A, B \in \mathfrak{g}$, i.e. l'*application linéaire* (20) *est un homomorphisme d'algèbres de Lie* (qui plonge monomorphiquement l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}\mathscr{X}$).

* * *

Une forme différentielle ω de degré $r > 0$ sur la variété $\mathscr{E}$ est dite *horizontale* si, pour tout point $p \in \mathscr{E}$, la fonctionnelle multilinéaire ω_p sur $T_p\mathscr{E}$ est telle que

$$\omega_p (A_1, \ldots, A_r) = 0$$

lorsque l'un au moins des vecteurs $A_1, \ldots, A_r$ est vertical.

L'affirmation du problème 13 entraîne de suite qu'*une forme différentielle* ω *de degré* $r > 0$ *sur* $\mathscr{E}$ *est horizontale si et seulement si la forme* $A^{\#} \lrcorner\, \omega$ *de degré* $r - 1$ (voir leçon III.18) *vérifie l'égalité*

$$A^{\#} \lrcorner\, \omega = 0 \tag{23}$$

pour tout élément $A \in \mathfrak{g}$.

En particulier, *une forme différentielle linéaire* θ *sur* $\mathscr{E}$ *est horizontale si et seulement si, pour tout* $A \in \mathfrak{g}$, *la fonction* $\theta(A^{\#})$ *sur* $\mathscr{E}$ *est identiquement nulle*:

$$\theta (A^{\#}) = 0. \tag{24}$$

On note que *la forme* $\pi^*\alpha$ *sur* $\mathscr{E}$ *est horizontale pour toute forme* α *sur* $\mathscr{B}$.

Problème 15 (suite du problème 14). Soit $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ un fibré des repères. Montrer que la forme linéaire θ sur $\mathscr{E}$ est horizontale si et seulement si elle s'écrit

$$\theta = g_k \, dx^k \tag{25}$$

(avec g_k, $k = 1, \ldots, m$, des fonctions sur $\mathscr{E}_U$) dans chaque carte $(\mathscr{E}_U, h)$.

Ce résultat prouve en particulier que les formes horizontales sur $\mathscr{E}$ peuvent en général être autres que $\pi^*\alpha$. (Une forme (25) s'écrit $\pi^*\alpha$ si et seulement si les fonctions g_k sont constantes sur les fibres.)

* * *

Avant de passer aux champs de sous-espaces horizontaux, nous allons améliorer un peu notre formalisme.

Soient $\mathscr{X}$ une variété différentiable, et $\mathscr{V}$ un espace vectoriel.

Définition 2. On suppose qu'il correspond à chaque point $p \in \mathscr{X}$ et à chaque vecteur $A_1, \ldots, A_r \in T_p\mathscr{X}$ le vecteur

$$\omega_p (A_1, \ldots, A_r) \tag{26}$$

de $\mathscr{V}$. La fonction

$$\omega : (p, A_1, \ldots, A_r) \mapsto \omega_p (A_1, \ldots, A_r)$$

est la *forme différentielle de degré r sur $\mathscr{X}$ à valeurs dans $\mathscr{V}$* si, pour toute fonctionnelle linéaire $l : \mathscr{V} \to \mathbb{R}$, la fonction

(27) $$l \circ \omega : (p, A_1, \ldots, A_r) \mapsto l(\omega_p(A_1, \ldots, A_r))$$

est une forme différentielle différentiable ordinaire de degré r sur $\mathscr{X}$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$), (i.e. c'est, pour tout point $p \in \mathscr{X}$, une fonctionnelle multilinéaire de degré r sur $\mathbf{T}_p\mathscr{X}$ qui dépend différentiablement de p).

Si l'on choisit une base $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ dans $\mathscr{V}$, alors chaque forme ω définit n formes usuelles

$$\omega^1 = \mathbf{e}^1 \circ \omega, \ldots, \omega^n = \mathbf{e}^n \circ \omega,$$

où $\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n$ sont les vecteurs de la base duale de l'espace des fonctionnelles linéaires $\mathscr{V}^*$ (qui vérifient la relation $\mathbf{e}^i(\mathbf{e}_j) = \delta^i_j$). Le développement du vecteur (26) suivant les vecteurs de la base $\mathbf{e}_1, \ldots$ $\ldots, \mathbf{e}_n$ s'écrit alors

(28) $$\omega_p(A_1, \ldots, A_r) = \omega^i_p(A_1, \ldots, A_r)\,\mathbf{e}_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Conformément aux notations générales de la théorie des fonctions, on aurait au lieu de (28)

(29) $$\omega = \omega^i \mathbf{e}_i,$$

mais on utilise d'ordinaire le signe $\otimes$:

(30) $$\omega = \omega^i \otimes \mathbf{e}_i.$$

Les problèmes ci-dessous montrent que nous avons le droit de le faire.

Problème 16. Montrer que les formes différentielles de degré r sur $\mathscr{X}$ à valeurs dans $\mathscr{V}$ sont exactement les sections du fibré Hom $(\Lambda^r\tau_{\mathscr{X}}, \theta_{\mathscr{V}})$, avec $\theta_{\mathscr{V}}$ le fibré trivial $(\mathscr{X} \times \mathscr{V}, \pi, \mathscr{X})$.

Problème 17. Montrer que quels que soient les fibrés vectoriels ξ et η, le fibré Hom (ξ, η) est canoniquement isomorphe au fibré $\xi^* \otimes \eta$. [*Indication.* Il ne faut pas oublier que l'espace vectoriel Hom $(\mathscr{W}, \mathscr{V})$ est canoniquement isomorphe à l'espace vectoriel $\mathscr{W}^* \otimes \mathscr{V}$ quels que soient $\mathscr{W}$ et $\mathscr{V}$. Utiliser de plus l'affirmation du problème 14 de la leçon 12.]

En particulier, Hom $(\Lambda^r\tau^*_{\mathscr{X}}, \theta_{\mathscr{V}}) = \Lambda^r\tau^*_{\mathscr{X}} \otimes \eta$. (On rappelle l'égalité $\Lambda^r\xi^* = (\Lambda^r\xi)^*$.)

Problème 18. Montrer que chaque section du fibré $\Lambda^r\tau^*_{\mathscr{X}} \otimes \theta_{\mathscr{V}}$ admet une représentation unique $\omega^i \otimes \mathbf{e}_i$, où ω^i, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont les sections de $\Lambda^r\tau^*_{\mathscr{X}}$ (formes différentielles de degré r sur $\mathscr{X}$) et $\mathbf{e}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, les sections de $\theta_{\mathscr{V}}$ définies par

$$\mathbf{e}_i(p) = (p, \mathbf{e}_i), \quad p \in \mathscr{X},$$

$\mathbf{e}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, du second membre étant les vecteurs de la base donnée de $\mathscr{X}$. [*Indication.* Voir problème 12 de la leçon 12.]

Ainsi, passer de la formule (29) à la formule (30), c'est passer des sections du fibré Hom $(\Lambda^r\tau_{\mathscr{X}}, \theta_{\mathscr{V}})$ à celles du fibré $\Lambda^r\tau^*_{\mathscr{X}} \otimes \theta_{\mathscr{V}}$ qui lui est isomorphe.

Le résultat du problème 17 aidant, on peut poursuivre les généralisations, à savoir on introduit pour tout fibré vectoriel η sur $\mathscr{X}$ les sections de

$$\mathrm{Hom}(\Lambda^r\tau_{\mathscr{X}}, \eta) = \Lambda^r\tau^*_{\mathscr{X}} \otimes \eta$$

(*formes différentielles à valeurs dans* η). [Nous les avons en fait rencontrées pour $r = 1$ dans la leçon 13 en tant que valeurs de l'opérateur dérivation covariante ∇.]

Plus généralement, on considère pour tout $r \geqslant 0$ et tout $s \geqslant 0$ (voir exemple 8 de la leçon 12) les sections du fibré $\tau^r_s\mathscr{X} \otimes \eta$ (champs tensoriels de type (r, s) *à valeurs dans* η).

Problème 19. Montrer que quels que soient les fibrés vectoriels ξ et η sur $\mathscr{X}$, on a les isomorphismes naturels

$$\mathrm{Hom}(\xi, \eta) = \mathrm{Hom}(\eta^*, \xi^*), \quad (\xi \otimes \eta)^* = \eta^* \otimes \xi^*.$$

Il en résulte en particulier que $(\tau^s_r\mathscr{X})^* = \tau^r_s\mathscr{X}$ et

$$\tau^r_s\mathscr{X} \otimes \eta = \mathrm{Hom}(\tau^s_r\mathscr{X}, \eta) = \mathrm{Hom}(\eta^*, \tau^r_s\mathscr{X}). \tag{31}$$

Aussi, on considère les sections de chacun des fibrés (31) comme champs tensoriels de type (r, s) sur $\mathscr{X}$ à valeurs dans η.

On pourrait certes interpréter (30) comme une simple variante graphique de la formule (29), donc (en imitant cette dernière) comme (28) mise sous forme conventionnelle abrégée. Dans ce cas, les formes $\omega^1, \ldots, \omega^n$ s'appellent *coordonnées* dans la base $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ de la forme $\mathbf{u}$ à valeurs dans $\mathscr{V}$. Dans tout changement de base, elles subissent la même transformation que les coordonnées des vecteurs de $\mathscr{V}$.

Quels que soient les champs vectoriels $X_1, \ldots, X_r$ sur $\mathscr{X}$, chaque forme différentielle ω de degré r à valeurs dans $\mathscr{V}$ définit par la formule

$$\omega(X_1, \ldots, X_r)(p) = \omega_p((X_1)_p, \ldots, (X_r)_p), \quad p \in \mathscr{X},$$

une fonction $\omega(X_1, \ldots, X_r)$ sur $\mathscr{X}$ à valeurs dans $\mathscr{V}$ (qui est différentiable s'il en est de même pour les champs $X_1, \ldots, X_r$ et la forme ω).

Problème 20. Soit $\mathsf{F}_{\mathscr{V}}\mathscr{X}$ l'espace vectoriel des fonctions différentiables sur $\mathscr{X}$ à valeurs dans $\mathscr{V}$. Montrer que

a. *L'application*

$$\mathfrak{a}\mathscr{X} \times \ldots \times \mathfrak{a}\mathscr{X} \to \mathsf{F}_{\mathscr{V}}\mathscr{X}, \quad (X_1, \ldots, X_r) \mapsto \omega(X_1, \ldots, X_r), \tag{32}$$

est antisymétrique et $\mathsf{F}\mathscr{X}$*-multilinéaire.*

b. *Si la variété* $\mathscr{X}$ *est séparée, alors la correspondance*

forme $\omega \Rightarrow$ *application* (32)

définit une application isomorphe du $\mathsf{F}\mathscr{X}$*-module des formes différentielles de degré r à valeurs dans* $\mathscr{V}$ *sur le* $\mathsf{F}\mathscr{X}$*-module de toutes les applications* $\mathsf{F}\mathscr{X}$*-multilinéaires antisymétriques*

$$\mathfrak{a}\mathscr{X} \times \ldots \times \mathfrak{a}\mathscr{X} \to \mathsf{F}_{\mathscr{V}}\mathscr{X}.$$

(Cf. leçon III.18)

Problème 21. Enoncer et démontrer l'affirmation analogue pour les formes différentielles et les champs tensoriels à valeurs dans un fibré vectoriel arbitraire η sur $\mathscr{X}$. [*Indication*. On aura $\Gamma\eta$ au lieu de $\mathsf{F}_{\mathscr{V}}\mathscr{X}$.]

On identifiera de règle la forme ω et l'application (32) correspondante.

Définition 3. On appelle *différentielle extérieure* de la forme (30), et on note $d\omega$, la forme

$$d\omega = d\omega^i \otimes e_i. \tag{33}$$

. **Problème 22.** Montrer qu'il s'agit d'une définition intrinsèque, i.e. que la forme (33) ne dépend pas du choix de la base $e_1, \ldots, e_n$.

Problème 23. Montrer que s'agissant des formes à valeurs vectorielles, on a la proposition 2 de la leçon III.19 (relativement à l'action naturelle des champs vectoriels $X \in \mathfrak{a}\mathscr{X}$ sur l'algèbre $\mathsf{F}_{\mathscr{V}}\mathscr{X}$).

En particulier,

$$d\omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega[X, Y] \tag{34}$$

si $\deg \omega = 1$, et si $\deg \omega = 2$, alors

$$d\omega(X, Y, Z) = X\omega(Y, Z) + Y\omega(Z, X) + Z\omega(X, Y) + \\ + \omega(X, [Y, Z]) + \omega(Y, [Z, X]) + \omega(Z, [X, Y]) \tag{35}$$

pour les champs $X, Y, Z \in \mathfrak{a}\mathscr{X}$ arbitraires.

LEÇON 17

Formes fondamentales et champs de sous-espaces horizontaux. — Connexions sur un fibré principal différentiable. — Projecteurs induits par les connexions. — Champs vectoriels horizontaux. — Connexions sur les fibrés associés. — Connexions sur les fibrés vectoriels associés.

Nous voulons appliquer les notions générales introduites dans les dernières pages de la leçon 16 au cas où $\mathscr{X}$ est la variété totale $\mathscr{E}$ d'un $\mathscr{G}$-fibré principal différentiable $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ et l'espace vectoriel $\mathscr{V}$ représente l'espace tangent $\mathfrak{g} = \mathbf{T}_e\mathscr{G}$ en e du groupe $\mathscr{G}$ (i.e. l'algèbre de Lie de $\mathscr{G}$).

Définition 1. Une forme différentielle linéaire θ sur $\mathscr{E}$ à valeurs dans $\mathfrak{g}$ s'appelle *forme fondamentale* si l'on a en chaque point $\mathbf{p} \in \mathscr{E}$

$$\theta\,(A^{\#})\,(\mathbf{p}) = A \tag{1}$$

pour tout vecteur $A \in \mathbf{T}_e\mathscr{G}$.

Exemple 1. Comme $\mathfrak{gl}(n\,;\,\mathbb{R}) = \mathrm{Mat}_n\,(\mathbb{R}\,)$, les formes à valeurs dans $\mathfrak{gl}(n\,;\,\mathbb{R}\,)$ ne sont autres que les matrices $\omega = \|\,\omega^i_j\,\|$ à éléments les formes différentielles usuelles ω^i_j. En particulier, les formes linéaires à valeurs dans $\mathfrak{gl}\,(n\,;\,\mathbb{R})$ sont les matrices $\theta = \|\,\theta^i_j\,\|$ dont les éléments sont les formes différentielles linéaires θ^i_j. Dans la carte $(\mathscr{E}_U,\, h)$ de la variété totale $\mathscr{E}$ du fibré des repères ξ de ξ, chaque forme θ^i_j s'écrit

$$\theta^i_j = f^{is}_{jr}\,dc^r_s + g^i_{jk}\,dx^k,$$

avec f^{is}_{jr} et g^i_{jk} des fonctions sur $\mathscr{E}_U$. La valeur de θ^i_j sur le vecteur tangent $(A,\,\mathbf{u})$ (on utilise les notations de la leçon 16) est égale à

$$f^{is}_{jr}a^r_s + g^i_{jk}u^k = \mathrm{Tr}\,(F^i_jA) + G_ku^k,$$

F^i_j et G_k étant $\|\,f^{is}_{jr}\,\|$ et $\|\,g^i_{jk}\,\|$ respectivement. En particulier, sa valeur sur un vecteur de la forme $(AC,\,0)$ est $\mathrm{Tr}\,(F^i_j\,AC)$. Aussi, une forme θ est fondamentale si et seulement si

$$\mathrm{Tr}\,(F^i_jAC) = a^i_j$$

pour toute matrice $A = \|\,a^i_j\,\|$ (voir problème 14 de la leçon 16). Mais on établit facilement (le démontrer !) que les matrices F^i_j possèdent cette propriété si et seulement si $F^i_jC = E^i_j$, avec E^i_j les unités matricielles (E^i_j a tous ses éléments $= 0$, à l'exception de l'élément

à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne qui vaut 1), i.e. si $F_j^i = E_j^i C^{-1}$ (donc $f_{jr}^{is} = {}'c_r^i \delta_j^s$, ${}'c_r^i$ étant les éléments de la matrice C^{-1}). Cela démontre qu'*une forme* $\theta = \| \theta_j^i \|$ *sur un fibré des repères à valeurs dans* $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$ *est fondamentale si et seulement si ses composantes* θ_j^i *s'écrivent dans chaque carte* $(\mathscr{E}_U, h)$

$$\theta_j^i = {}'c_r^i \, dc_j^r + g_{jk}^i \, dx^k,$$

i.e. si

$$\theta = C^{-1} \, dC + G_k \, dx^k, \tag{2}$$

où dC est la matrice $\| dc_j^r \|$ et $G_k = \| g_{jk}^i \|$, $1 \leqslant k \leqslant m$.

Chaque forme différentielle linéaire θ à valeurs dans $\mathfrak{g}$ définit par la formule

$$H_p = \{B \in T_p\mathscr{E} ; \ \theta_p (B) = 0\}, \quad p \in \mathscr{E},$$

un champ H de sous-espaces. Nous désignerons ce champ par le symbole Ann θ et nous lui donnerons le nom d'*annulateur de la forme* θ.

On voit sans peine que *l'annulateur* H *de chaque forme fondamentale* θ *est un champ de sous-espaces horizontaux*. En effet, soient $\theta^1, \ldots, \theta^n$ les coordonnées de θ dans une base $e_1, \ldots, e_n$ de l'espace $T_e\mathscr{G}$. La formule (1) entraîne de suite que quels que soient les nombres $c_1, \ldots$ $\ldots, c_n$, la valeur de la forme $c_i\theta^i$ sur le champ vectoriel $A^\#$ est $c(A)$, où c est un covecteur sur $T_e\mathscr{G}$ à coefficients $c_1, \ldots, c_n$ dans la base $e_1, \ldots, e_n$. Si l'on a $c_i\theta_p^i = 0$ en un point $p \in \mathscr{E}$, alors $c(A) = 0$ pour tout vecteur $A \in T_e\mathscr{G}$, donc $c = 0$, i.e. $c_1 = 0, \ldots, c_n = 0$. Ainsi, *les formes* $\theta^1, \ldots, \theta^n$ *sont linéairement indépendantes en tous les points* $p \in \mathscr{E}$. Puisque Ann θ est évidemment égal à Ann $(\theta^1, \ldots, \theta^n)$, cela prouve l'égalité

$$\dim H_p = m$$

pour tout point $p \in \mathscr{E}$. D'autre part, on a (conformément à (1) et si B est un vecteur vertical quelconque en un point $p \in \mathscr{E}$) :

$$\theta_p (B) = A,$$

avec A un vecteur de $T_e\mathscr{G}$ tel que $A_p^\# = B$. Si $B \in H_p$, on a donc $A = 0$ et, partant, $B = 0$. Ainsi,

$$T_p\mathscr{F}_b \cap H_p = 0,$$

ce qui implique $T_p \mathscr{E} = T_p\mathscr{F}_b \oplus H_p$ (puisque $\dim H_p = m = \dim T_p\mathscr{E} - \dim T_p\mathscr{F}_b$). Par conséquent, H est un champ de sous-espaces horizontaux.

Inversement, *tout champ* H *de sous-espaces horizontaux est l'annulateur de la forme fondamentale* θ *unique à valeurs dans* $\mathfrak{g}$. En effet

si $H = \mathrm{Ann}\ \theta$ et que θ soit fondamentale, on a en chaque point $p \in \mathscr{E}$ pour tout vecteur $B \in T_p\mathscr{E}$:

$$\theta_p(B) = A, \tag{3}$$

A étant un vecteur de $T_e\mathscr{G}$ tel que $A_p^\# = B^V$. Ainsi, θ est unique. Afin de démontrer l'existence, on définit θ sur $\mathscr{E}$ par la formule (3). Vu que $(A_p^\#)^V = A_p^\#$ pour tout $A \in T_e\mathscr{G}$, la forme est fondamentale. De plus, $\theta_p(B) = 0$ si et seulement si $B^V = 0$, i.e. si $B \in H_p$. Donc, $H = \mathrm{Ann}\ \theta$. □

* * *

L'action du groupe $\mathscr{G}$ sur la variété $\mathscr{E}$ étant différentiable, l'application

$$R_a : \mathscr{E} \to \mathscr{E}, \quad p \mapsto pa, \quad p \in \mathscr{E},$$

est un difféomorphisme pour tout $a \in \mathscr{G}$.

Comme dans le cas des fibrés des repères, nous dirons que le champ H de sous-espaces horizontaux défini sur $\mathscr{E}$ est *équivariant* si

$$(dR_a)_p H_p = H_{pa} \tag{4}$$

pour tout point $p \in \mathscr{E}$ et tout $a \in \mathscr{G}$ (cf. formule (8) de la leçon 16). Nous appellerons une fois de plus *connexion* un champ équivariant différentiable de sous-espaces horizontaux. (Cf. définition 1 de la leçon 16.)

Problème 1. Montrer que le champ H de sous-espaces horizontaux est équivariant (est une connexion) si et seulement si l'on a pour tout vecteur $B \in T_p\mathscr{E}$ et tout $a \in \mathscr{G}$ l'une des égalités

$$[(dR_a)_p B]^V = (dR_a)_p B^V, \quad [(dR_a)_p B]^H = (dR_a)_p B^H$$

(donc les deux).

On rappelle (voir leçon 14) que chaque élément a du groupe de Lie $\mathscr{G}$ définit l'application linéaire

$$\mathrm{Ad}\ a : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g} = T_e\mathscr{G},$$

qui n'est autre que la différentielle au point e de l'automorphisme intérieur

$$\mathrm{int}_a : \mathscr{G} \to \mathscr{G}, \quad x \mapsto axa^{-1}, \quad x \in \mathscr{G}.$$

Exemple 2. Pour toute matrice $X \in GL(n; \mathbb{R})$, l'automorphisme $\mathrm{int}_X : A \mapsto XAX^{-1}$ est linéaire par rapport à A. Aussi, sa différentielle coïncide avec lui-même, si bien que

$$(\mathrm{Ad}\ X)\, C = XCX^{-1}$$

pour toute matrice C de $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{R}) = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$.

Une forme linéaire différentielle θ sur $\mathscr{E}$ à valeur dans $\mathfrak{g}$ est dite *équivariante* si

$$R_a^* \theta = (\mathrm{Ad}\ a^{-1})\ \theta$$

pour tout élément $a \in \mathscr{G}$, i.e. si l'on a en chaque point $\mathrm{p} \in \mathscr{E}$ pour tout vecteur $B \in \mathrm{T_p}\mathscr{E}$:

$$\theta_{\mathrm{p}a}\ ((\mathrm{d}R_a)_\mathrm{p} B) = (\mathrm{Ad}\ a^{-1})\ (\theta_\mathrm{p}\ (B)).$$

Exemple 3. La forme (2) prend en p de coordonnées (C, x) sur $B = (A, \mathrm{u})$ la valeur $C^{-1}A + G_k u^k$, avec $G_k = G_k\ (C, \mathrm{x})$. Aussi, la matrice $(\mathrm{Ad}\ X^{-1})\ (\theta_\mathrm{p}\ (B))$ est égale à $X^{-1}\ (C^{-1}A + G_k\ ((A, \mathrm{x})\ u^k))X$ pour toute $X \in \mathrm{GL}\ (n\ ; \mathbb{R})$ (voir exemple 2). D'autre part, $(\mathrm{d}R_X)_\mathrm{p}\ B = (AX, \mathrm{u})$ (voir problème 5 de la leçon 16), donc

$$\theta_{\mathrm{p}X}\ ((\mathrm{d}R_X)_\mathrm{p}\ B) = (CX)^{-1}AX + G_k\ (CX, \mathrm{x})\ u^k$$

(on rappelle que le point $\mathrm{p}X$ a les coordonnées (CX, x)). Par conséquent, la forme (2) est équivariante si et seulement si

$$X^{-1}C^{-1}AX + X^{-1}G_k\ (C, \mathrm{x})\ Xu^k = X^{-1}C^{-1}\ AX + G_k\ (CX, \mathrm{x})\ u^k,$$

i.e. si et seulement si

$$X^{-1}G_k\ (C, \mathrm{x})\ X = G_k\ (CX, \mathrm{x}), \quad 1 \leqslant k \leqslant m,$$

pour toute matrice X et toute matrice C de $\mathrm{GL}\ (n\ ; \mathbb{R})$ (et x quelconque). Mais on voit aisément (le prouver !) que les matrices G_k vérifient cette condition si et seulement si

$$G_k\ (C, \mathrm{x}) = C^{-1}\Gamma_k C, \quad 1 \leqslant k \leqslant m,$$

$\Gamma_k = \Gamma_k\ (\mathrm{x})$ étant des matrices dépendant de $\mathbf{x}$ seul (i.e. elles ont pour éléments des fonctions du voisinage de coordonnées $U \subset \mathscr{B}$). Cela démontre que *les formes fondamentales équivariantes sur les fibrés des repères s'écrivent sur chaque voisinage de coordonnées* $\mathscr{E}_U$

$$\theta = C^{-1}\ \mathrm{d}C + C^{-1}\omega C,$$

avec $\omega = \Gamma_k \mathrm{d}x^k$ une matrice des formes linéaires sur U.

On note qu'il s'agit précisément des formes (12) de la leçon 16 qui définissent les connexions sur les fibrés des repères. La coïncidence n'est pas fortuite. En effet, on montre sans peine que l'*annulateur* $H = \mathrm{Ann}\ \theta$ *d'une forme fondamentale* θ *est équivariant* (*est une connexion*) *si et seulement s'il en est de même de* θ. En effet, si H est équivariant, on a pour tout vecteur $B \in \mathrm{T_p}\mathscr{E}$ et tout $a \in \mathscr{G}$

$$[(\mathrm{d}R_a)_\mathrm{p}\ B]^V = (\mathrm{d}R_a)_\mathrm{p}\ B^V$$

(voir problème 1). D'autre part, on a par définition

$$\theta_{\mathrm{p}a}\ ((\mathrm{d}R_a)_\mathrm{p}\ B) = \hat{A},$$

où $\hat{A}$ est un vecteur de $T_e\mathcal{G}$ tel que $\hat{A}^{\#}_{pa} = [(dR_a)_p B]^V$. Donc

$$\hat{A}^{\#}_{pa} = (dR_a)_p B^V = (dR_a)_p A^{\#}_p,$$

où A de $T_e\mathcal{G}$ présente la propriété: $A^{\#}_p = B^V$.

Problème 2. Démontrer que si

$$\hat{A}^{\#}_{pa} = (dR_a)_p A^{\#}_p,$$

alors $\hat{A} = (\mathrm{Ad}\ a^{-1})\, A$. [*Indication*. Par définition, $(dj_p)_e\hat{A} = \hat{A}^{\#}_p$, où $j_p : x \mapsto px$, $x \in \mathcal{G}$. Aussi, $(dj_{pa})_e\hat{A} = \hat{A}^{\#}_{pa} = (dR_a)_p\hat{A}^{\#}_p = (dR_a)_p\,(dj_p)_eA$, i.e. $(dj_{pa})_e\hat{A} = d\,(R_a \circ j_p)_eA$. D'autre part, $j_{pa} \circ \mathrm{int}_{a^{-1}} = R_a \circ j_p$.]

Comme $\theta_p\,(B) = A$, il en résulte l'égalité

$$\theta_{pa}\ ((dR_a)_pB) = (\mathrm{Ad}\ a^{-1})\ (\theta_p\ (B)),$$

i.e. l'équivariance de la forme θ.

Inversement, si θ est équivariante et $\theta_p\,(B) = 0$, alors

$$\theta_{pa}\ ((dR_a)_p\ B) = (\mathrm{Ad}\ a^{-1})\ (\theta_p\ (B)) = 0,$$

donc $(dR_a)_pB \in H_{pa}$, ce qui prouve l'inclusion $(dR_a)_p\,H_p \subset H_{pa}$. Si l'on remplace p par pa et a par a^{-1}, on a l'inclusion de sens contraire. Par conséquent, le champ H est équivariant. □

En résumé, on a la

Proposition 1. *Il existe une correspondance biunivoque canonique entre les connexions H sur le $\mathcal{G}$-fibré principal ξ et les formes fondamentales équivariantes θ sur la variété $\mathscr{E}$ à valeurs dans* $\mathfrak{g}$. *Ce faisant, il correspond à θ la connexion $H =$* Ann θ *et à la connexion H la forme* (3). □

Définition 2. La forme θ s'appelle *forme de connexion H*.

On donne des fois le nom de connexion à θ et non au champ H.

Ainsi, les connexions sont définies sur les fibrés principaux différentiables en tant que champs de sous-espaces horizontaux et en tant que formes différentielles linéaires à valeurs dans $\mathfrak{g}$.

* * *

Les connexions se prêtent à d'autres définitions. Chaque connexion H sur un fibré principal différentiable $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ définit, par exemple, dans l'espace vectoriel $\mathfrak{a}\mathscr{E}$ des champs vectoriels différentiables sur $\mathscr{E}$ l'opérateur linéaire

$$H : \mathfrak{a}\mathscr{E} \to \mathfrak{a}\mathscr{E}, \quad X \mapsto X^H,$$

qui fait correspondre au champ vectoriel $X \in \mathfrak{a}\mathscr{E}$ sa composante horizontale X^H. Cet opérateur

a) est un projecteur (i.e.

$$H^2 = H);$$

b) commute avec tous les opérateurs de la forme R_a^* (i.e.

$$R_a^* \circ H = H \circ R_a^*);$$

c) annule tous les champs vectoriels verticaux: si le champ X est vertical, alors $HX = 0$.

Problème 3. Montrer que *tout opérateur H muni des propriétés* a), b) et c) *est engendré par une connexion unique.*

Ainsi, on identifie les connexions sur ξ à ces opérateurs.

On procède de même en ce qui concerne les connexions sur un fibré vectoriel ξ à condition de remplacer b) par la condition qui veu que H dépende linéairement (au sens évident) des coordonnées dans la fibre.

* * *

Un champ vectoriel $Y \in \mathfrak{a}\mathscr{E}$ tel que $Y^H = Y$, i.e. $Y_p \in H_p$ pour tout point $p \in \mathscr{E}$, est dit *horizontal*. Tous les champs horizontaux forment le sous-espace Im H de l'espace vectoriel $\mathfrak{a}\mathscr{E}$.

Sur le sous-espace H_p, l'application

$$(d\pi)_p : T_p\mathscr{E} \to T_b\mathscr{B}, \quad b = \pi(p),$$

est un isomorphisme, si bien qu'il existe sur la variété $\mathscr{E}$ pour tout champ vectoriel $X \in \mathfrak{a}\mathscr{E}$ un champ vectoriel horizontal $\tilde{X}$ tel que

$$(d\pi)_p\tilde{X}_p = X_{\pi(p)} \text{ pour tout point } p \in \mathscr{E}.$$

$\tilde{X}$ est le *relèvement horizontal* du champ X.

Problème 4. Démontrer que *le champ $\tilde{X}$ est différentiable dès qu'il en est de même de X.* [*Indication.* Construire un champ différentiable $Y \in \mathfrak{a}\mathscr{E}$ tel que $(d\pi)_p(Y_p) = X_{\pi(p)}$ en tout point $p \in \mathscr{E}$, puis appliquer l'opérateur H.]

Ainsi, la correspondance $X \mapsto \tilde{X}$ est l'application (manifestement monomorphe et linéaire) $\mathfrak{a}\mathscr{B} \to \mathfrak{a}\mathscr{E}$ qui plonge $\mathfrak{a}\mathscr{B}$ dans Im H.

Problème 5. Démontrer que *le champ horizontal $Y \in \mathfrak{a}\mathscr{E}$ est le relèvement horizontal $\tilde{X}$ d'un champ $X \in \mathfrak{a}\mathscr{B}$ si et seulement si*

$$R_a^*Y = Y$$

pour tout $a \in \mathscr{G}$.

Problème 6. Démontrer que *pour tout vecteur horizontal $A \in T_p\mathscr{E}$, il existe un champ $X \in \mathfrak{a}\mathscr{B}$ tel que*

$$\tilde{X}_p = A.$$

Problème 7. Démontrer que

$$\widetilde{[X, Y]} = [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]^H$$

quels que soient les champs $X, Y \in \mathfrak{a}\mathscr{B}$.

Proposition 2. *Quels que soient l'élément $A \in \mathfrak{g}$ et le champ horizontal $Y \in \mathfrak{a}\mathscr{E}$, le champ $[A^\#, Y]$ est horizontal. Si $Y = \widetilde{X}$, alors $[A^\#, Y] = 0$.*

Démonstration. Conformément à la formule (21) de la leçon 16,

$$[A^\#, Y] = \lim_{t\to 0} \frac{R^*_{\exp tA} Y - Y}{t}.$$

Mais il est clair que si Y est horizontal, le champ $R^*_a Y$ l'est également pour n'importe quel $a \in \mathscr{G}$. Aussi, $R^*_{\exp tA} Y - Y$ est horizontal, d'où la même propriété de $[A^\#, Y]$.

Dans le cas où $Y = \widetilde{X}$, on a $Y = R^*_{\exp tA} Y$, donc $[A^\#, Y] = 0$. □

* * *

Le passage des connexions sur un fibré des repères aux connexions sur le fibré vectoriel correspondant (voir proposition 2 de la leçon 16) se transpose au cas général.

Soient $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ un fibré principal différentiable quelconque, $\mathscr{G}$ son groupe de Lie structural et $\mathscr{F}$ une variété différentiable sur laquelle $\mathscr{G}$ opère différentiablement. On définit (voir leçon 1) le fibré associé $\xi[\mathscr{F}]$ de fibre $\mathscr{F}$. Les points de l'espace total $\mathscr{E}$ de $\xi[\mathscr{F}]$ sont par définition les orbites $[\mathrm{p}, x]_{\mathscr{G}}$ de l'action naturelle de $\mathscr{G}$ sur le produit direct $\mathscr{E} \times \mathscr{F}$.

Problème 8. Démontrer que *le fibré $\xi[\mathscr{F}]$ est différentiable et localement trivial en tant que fibré différentiable* (il admet un atlas trivialisant formé de trivialisations qui sont des difféomorphismes). Démontrer de plus que *l'application canonique de passage au quotient $\mathscr{E} \times \mathscr{F} \to \mathscr{E}$ est différentiable.*

Aussi, on parle, au cas de $\xi[\mathscr{F}]$, des vecteurs verticaux et des champs de sous-espaces horizontaux.

On attache à un point $y \in \mathscr{F}$ quelconque l'application (manifestement différentiable)

$$f_y : \mathscr{E} \to \mathscr{E} \tag{5}$$

définie par la formule

$$f_y(\mathrm{p}) = [\mathrm{p}, y]_{\mathscr{G}}, \quad \mathrm{p} \in \mathscr{E}.$$

Problème 9. Démontrer que *l'égalité*

$$f_y(\mathrm{p}) = f_z(\mathrm{q}), \quad \mathrm{p}, \mathrm{q} \in \mathscr{E}, \quad y, z \in \mathscr{F},$$

a lieu si et seulement s'il existe un élément $a \in \mathcal{G}$ tel que $\mathrm{q} = \mathrm{p}a$ *et* $y = az$.

En déduire que *pour toute connexion H sur* ξ, *la formule*

$$(6) \qquad H_p = (\mathrm{d}f_y)_{\mathrm{p}} H_{\mathrm{p}}, \quad p = f_y(\mathrm{p}), \quad \mathrm{p} \in \mathscr{E}, \quad y \in \mathcal{F},$$

définit bien sur $\mathscr{E}$ *un champ* $H : p \mapsto H_p$ *de sous-espaces horizontaux.* [Cf. leçon 16, démonstration de la proposition 2.]

Les champs de la forme (6) sont les *connexions* sur $\xi[\mathcal{F}]$. Si $\mathcal{G} = \mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ et $\mathcal{F} = \mathbb{R}^n$, cette définition cadre (voir proposition 2 de la leçon 16) avec la définition primitive des connexions sur les fibrés vectoriels (définition 3 de la leçon 10).

On voudrait bien caractériser les champs (6) en termes de $\xi[\mathcal{F}]$ sans recourir au fibré principal ξ (ce qu'on a justement fait dans la leçon 10 pour les connexions sur les fibrés vectoriels). La chose est possible si l'on utilise la $(\mathcal{G}, \mathcal{F})$-structure sur $\xi[\mathcal{F}]$ (voir leçon 9). Que les lecteurs s'en occupent s'ils en ont le désir.

* * *

Un cas particulier important est celui où la fibre type $\mathcal{F}$ est l'espace vectoriel $\mathcal{V}$ et le groupe $\mathcal{G}$ opère linéairement sur $\mathcal{V}$, i.e. il l'agit de la *représentation linéaire*

$$\alpha : \mathcal{G} \mapsto \mathrm{Aut}\, \mathcal{V}$$

de $\mathcal{G}$ dans le groupe Aut $\mathcal{V}$ des automorphismes linéaires de $\mathcal{V}$.

Problème 10 (cf. exemple 3 de la leçon 6). Démontrer que *le fibré associé* $\xi[\mathcal{V}]$ *est dans ce cas un fibré vectoriel.* On le note $\xi[\alpha]$ (et on désigne par $\mathscr{E} \underset{\alpha}{\times} \mathcal{V}$ son espace total $\mathscr{E} \underset{\mathcal{G}}{\times} \mathcal{V}$).

Lorsque $\mathcal{G} = \mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ et que ξ est le fibré des repères du fibré vectoriel ξ, on emploie la notation $\xi[\alpha]$ au lieu de $\xi[\alpha]$.

Si $\alpha = \mathrm{id}$, on a certes $\xi[\alpha] = \xi$.

Problème 11. On suppose que la représentation

$$(7) \qquad \alpha : \mathrm{GL}(n; \mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$$

est définie par

$$\alpha(A) = (A^{\mathsf{T}})^{-1}, \quad A \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{R}).$$

Montrer que *quel que soit le fibré vectoriel* ξ, *le fibré associé* $\xi[\alpha]$ *est isomorphe à* ξ^* (ξ^* étant un fibré vectoriel de fibres $(\mathcal{F}_b^\xi)^*$, $b \in \mathscr{B}$; voir problème 11 de la leçon 12). [*Indication.* L'isomorphisme $\xi[\alpha] \to \xi^*$ établit la correspondance entre le point $[\mathrm{p}, \mathrm{y}]$ de $\mathscr{E} \underset{\alpha}{\times} \mathbb{R}^n$, où $\mathrm{p} = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathscr{E}$, et $\mathrm{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ (faites attention à la position des indices !), et le point $q = y_i p^i$ de l'espace $\mathscr{E}^* = \mathscr{E}^{\xi^*}$ avec $p^1, \ldots, p^n$ une base de l'espace vectoriel $(\mathcal{F}_b^\xi)^* = \mathcal{F}_b^{\xi^*}$ qui est la base duale de la base $p_1, \ldots, p_n$ de $\mathcal{F}_b^\xi$.]

Problème 12. (Généralisation du problème 11.) Soit $T_s^r\mathcal{V}^0$ un espace de tenseurs de type (r, s) sur l'espace vectoriel $\mathcal{V}^0$ (qui sont des fonctionnelles multilinéaires de r vecteurs et s covecteurs; voir leçon II.6). On choisit une base dans $\mathcal{V}^0$. Soit la représentation

$$\alpha : \mathrm{GL}(n; \mathbb{R}) \to \mathrm{Aut}(T_s^r\mathcal{V}^0)$$

qui établit une correspondance entre la matrice $A \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ et l'opérateur linéaire $\alpha(A)$: $T_s^r\mathcal{V}^0 \to T_s^r\mathcal{V}^0$ défini par la formule

$(\alpha(A)S)(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r, \xi^1, \ldots, \xi^s) = S(A\mathbf{x}_1, \ldots, A\mathbf{x}_r, (A^*)^{-1}\xi^1, \ldots, (A^*)^{-1}\xi^s)$,

où A est l'opérateur $\mathcal{V}^0 \to \mathcal{V}^0$ de matrice A. Montrer que *pour tout fibré vectoriel* ξ, *le fibré associé* $\xi[\alpha]$ *est isomorphe au fibré* $T_s^r\xi$ (voir exemple 8 de la leçon 12).

Soit donnée, sur le fibré vectoriel ξ, la connexion H. Sur le fibré principal des repères ξ, il lui correspond la connexion H à laquelle est attachée sur $\xi[\alpha] = \xi[\alpha]$ une connexion $H[\alpha]$.

On définit $H[\alpha]$ lorsque α est la représentation (7), si bien que $\xi[\alpha] = \xi^*$.

Pour chaque base $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n)$ du module $\Gamma(\xi|_U)$ sur le voisinage de coordonnées U trivialisant pour ξ, il existe la *base duale* $\mathbf{c} = (c^1, \ldots, c^n)$ du module $\Gamma(\xi^*|_U)$, qui jouit de la propriété suivante: les covecteurs $c^1(b), \ldots, c^n(b)$ forment en tout point $b \in U$ une base de $\mathcal{F}_b^*$, duale de la base $\mathbf{s}(b) = (s_1(b), \ldots, s_n(b))$ de $\mathcal{F}_b = \mathcal{F}_b^*$. (*Question*. Pourquoi les sections $c^1, \ldots, c^n$ du fibré $\xi^*|_U$ sont-elles différentiables ?) La base $\mathbf{s}$ (jointe à l'application de coordonnées $U \to \mathbb{R}^m$) définit sur l'ensemble $\mathscr{E}_U = \bigcup \mathcal{F}_b$, $b \in U$, les coordonnées a^i, x^k, où x^k sont les coordonnées dans U du point $b = \pi(p)$, $p \in \mathscr{E}_U$, et a^i celles du vecteur $p \in \mathcal{F}_b$ dans la base $\mathbf{s}(b)$. Quant à la base $\mathbf{c}$, elle définit sur $\mathscr{E}_U^* = \bigcup \mathcal{F}_b^*$, $b \in U$, les coordonnées a_i, x^k, les secondes étant celles de $b = \pi(q)$, $q \in \mathscr{E}_U^*$, dans U et les premières les coordonnées du covecteur $q \in \mathcal{F}_b^*$ dans la base $\mathbf{c}(b)$. On calcule en coordonnées a_i, x^k les coefficients C_{ki}^j de $H^* = H[\alpha]$ à partir des coefficients Γ_{kj}^i en coordonnées a^i, x^k de la connexion H.

Par définition, $H = \mathrm{Ann}(\theta^1, \ldots, \theta^n)$ sur U, avec

$$\theta^i = da^i + \Gamma_{kj}^i a^j\, dx^k.$$

De même, $H^* = \mathrm{Ann}(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ sur U, avec

$$\theta_i = da_i + C_{ki}^j a_j\, dx^k, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{8}$$

et le problème consiste à exprimer les fonctions C_{ki}^j moyennant les fonctions Γ_{kj}^i.

Si l'on conserve les notations de la leçon 16, chaque point $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ de l'espace $\mathscr{E}$ s'écrit $(A, \mathbf{x})$, où A est la matrice $\|a_i^j\|$ des coordonnées dans la base $\mathbf{s}(b)$ des vecteurs $p_i \in \mathcal{F}_b$, $b = \pi(\mathbf{p})$ (si bien que $p_i = a_i^j s_j(b)$ pour tout $i = 1, \ldots, n$) et $\mathbf{x}$ est la ligne $(x^1, \ldots, x^n)$ des coordonnées du point b. En particulier, $\mathbf{p}_0 = \mathbf{s}(b)$ est de la forme $(E, \mathbf{x})$, E étant la matrice unité.

Le symbole analogue pour le vecteur

$$c_j^i \left(\frac{\partial}{\partial a_j^i}\right)_p + u^k \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_p$$

de l'espace $T_p\mathscr{E}$ est (C, u), avec $C = \| c_j^i \|$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, et $u = (u^1, \ldots, u^n)$. En vertu des développements de la leçon 16 (voir en particulier les formules (5) et (10) de la leçon mentionnée), une condition nécessaire et suffisante pour que le vecteur $(C, u) \in T_p\mathscr{E}$ soit dans H_p, $p = (A, x)$, est

$$C = -u^k F_k, \quad \text{où } F_k = \| \Gamma_{sk}^i a_j^s \|.$$

En particulier, les vecteurs $(-F_1, e_1), \ldots, (-F_m, e_m)$ constituent une base de H_p.

Quand $p = p_0$, on en tire que

$$(9) \qquad (-\Gamma_1, e_1), \ldots, (-\Gamma_m, e_m), \quad où\ \Gamma_k = \| \Gamma_{kj}^i \|,$$

forment une base de l'espace H_{p_0}.

Etant donné l'identification du problème 7, l'application (5) s'écrit dans ce cas

$$f_y : \mathscr{E} \to \mathscr{E}^*, \quad y = (y_1, \ldots, y_n) \in R^n.$$

Elle est définie par

$$f_y(p) = y_i p^i,$$

où la base p^i, $1 \leqslant i \leqslant n$, de $\mathscr{F}_p^*$ est la duale de la base p de l'espace $\mathscr{F}_b$. Il s'ensuit en particulier que *le point* $f_a(p_0)$, $a = (a_1, \ldots, a_n)$ *a les coordonnées* a_i, x^k (x^k étant une fois de plus les coordonnées de $b = \pi(p_0)$).

Pour chaque point $p \in \mathscr{E}_U$, la différentielle $(df_y)_p$ en p de l'application f_y représente l'application linéaire $T_p\mathscr{E} \to T_q\mathscr{E}^*$, avec $q = f_y(p) = y_i p^i$. Nous noterons par convention (c, u) ($c = (c_1, \ldots, c_n)$, $u = (u^1, \ldots, u^n)$) le vecteur

$$c_i \left(\frac{\partial}{\partial a_i}\right)_q + u^k \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_q$$

de l'espace $T_q\mathscr{E}^*$.

Problème 13. Démontrer (cf. problème 5 de la leçon 16) que lorsque $p = (A, x)$, on a

$$(df_y)_p (C, u) = (-yA^{-1} CA^{-1}, u)$$

quel que soit le vecteur $(C, u) \in T_p\mathscr{E}$. [*Indication.* Il est bien connu que $dA^{-1} = -A^{-1}\, dA A^{-1}$.]

Lorsque $p_0 = p$ et $A = E$, il en résulte que l'application $(df_a)_{p_0}$ transforme les composantes (9) d'une base de H_{p_0} en les vecteurs

$$(10) \qquad (a\Gamma_1, e_1), \ldots, (a\Gamma_m, e_m),$$

i.e. *pour un point* $q \in \mathscr{E}_U^*$ *de coordonnées* a_i, x^h, *les vecteurs* (10), *où* a $=$ $= (a_1, \ldots, a_n)$ *et* $\Gamma_k = \| \Gamma_{kj}^i \|$, $1 \leqslant k \leqslant m$, *constituent une base de l'espace* H_q^*.

Puisque les formes (8) prennent les valeurs $a_j \Gamma_{ki}^j + C_{ki}^j a_j$ sur les vecteurs (10) et que ces valeurs doivent être nulles, il vient $C_{ki}^j =$ $= - \Gamma_{ki}^j$, i.e.

$$\theta_i = da_i - \Gamma_{ki}^j a_j, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Ce résultat prouve que *la connexion* H^* *coïncide avec la connexion sur* ξ^* *associée à la dérivation covariante* ∇ *de la proposition* 1 *de la leçon* 12.

Problème 14. Montrer que les connexions associées aux dérivations covariantes de la proposition 2 de la leçon 12 ne sont autres que les connexions $H[\alpha]$ pour la représentation α du problème 12. (Voir remarque 3 de la leçon 12.)

Ainsi, les deux approches des connexions sur $T_s^r \xi$ conduisent au même résultat.

Transport parallèle le long d'une courbe. — Groupe d'holonomie et sa composante de l'unité. — Lemme sur la décomposition des lacets homotopes à zéro en produit de petits lassos. — Démonstration de la connexité du groupe d'holonomie restreint. — Isomorphisme de groupes d'holonomie en deux points distincts. — Dénombrabilité du groupe fondamental. — Théorème de réduction. — Démonstration de l'existence d'une connexion et des recouvrements trivialisations universelles. — Espace affine des connexions.

Analysons plus à fond les courbes horizontales introduites dans la leçon 11.

Soit $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ un fibré vectoriel différentiable de rang n sur une variété séparée différentiable m-dimensionnelle $\mathscr{B}$, et soit H une connexion quelconque sur ξ. Soient ensuite $u : I \to \mathscr{B}$ une courbe différentiable de $\mathscr{B}$ d'origine $b_0 \in \mathscr{B}$, et p_0 un point de la variété $\mathscr{E}$ tel que $\pi(p_0) = b_0$. Il est connu depuis la leçon 11 qu'on trouve dans $\mathscr{E}$ une courbe horizontale unique $v : I \to \mathscr{B}$, relèvement de u, qui commence en p_0. L'extrémité p_1 de v est dans la fibre $\mathscr{F}_{b_1}$ au-dessus de l'extrémité b_1 de u, et la correspondance $p_0 \mapsto p_1$ définit l'application

$$(1) \qquad \Pi_u : \mathscr{F}_{b_0} \to \mathscr{F}_{b_1}$$

qui dépend de la courbe u seule.

Définition 1. L'application (1) constitue le *transport parallèle* de la fibre $\mathscr{F}_{b_0}$ sur la fibre $\mathscr{F}_{b_1}$ le long de la courbe u. Si l'on s'en tient à cette définition, on dit des fois du vecteur $p_1 = \Pi_u p_0$ de l'espace vectoriel $\mathscr{F}_{b_1}$ qu'il est *parallèle au vecteur p_0 le long de u.*

On note que le vecteur $v(t) \in \mathscr{F}_{u(t)}$ est par définition parallèle à p_0 quel que soit $t \in I$. On comprend désormais pourquoi la courbe v est également appelée champ de vecteurs parallèles sur u (voir leçon 11).

Remarque 1. S'agissant des fibrés vectoriels arbitraires le transport parallèle est à vrai dire un terme peu justifié. L'expression « *transport horizontal* » ne qualifierait-elle mieux l'application Π_u? On espère qu'à l'avenir on remédiera à cet état de choses, mais en attendant, il faut s'en accomoder.

On suppose que le segment $I = [a, b]$ est partagé en deux segments partiels $I_1 = [a, c]$ et $I_2 = [c, b]$. On définit pour toute courbe (différentiable ou non) $u : I \to \mathscr{B}$ les courbes $u_1 = u|_{I_1}$ et $u_2 = u|_{I_2}$. Nous dirons de u qu'elle est *composée* de u_1 et u_2, ce qui se note $u = u_1u_2$. (C'est un cas spécial de la relation de composition pour les chemins généralisés; voir leçon 3.)

L'égalité $u = u_1 \ldots u_m$, $m > 2$, admet une interprétation analogue.

On conçoit que si une courbe différentiable u est composée de deux courbes u_1 et u_2 (nécessairement différentiables), alors

$$(2) \qquad \Pi_u = \Pi_{u_2} \circ \Pi_{u_1}, \quad u = u_1 u_2$$

(c'est la même chose pour les facteurs en nombre quelconque).

Si $u = u_1 \ldots u_m$ et si $u_1, \ldots, u_m$ sont différentiables, la courbe u est dite *différentiable par morceaux* (cf. leçon 3, définition d'un chemin différentiable par morceaux). On pose par définition pour ce u

$$(3) \qquad \Pi_u = \Pi_{u_m} \circ \ldots \circ \Pi_{u_1}, \quad u = u_1 \ldots u_m.$$

Problème 1. Démontrer que *la définition* (3) *est intrinsèque*, i.e. que l'application Π_u ne dépend pas de la décomposition de la courbe u en produit de courbes différentiables $u_1, \ldots, u_m$. [*Indication.* La formule (3) est juste pour u différentiable.]

Problème 2. Montrer la validité de (2) pour u_1, u_2 différentiables par morceaux (et la justesse de (3) pour $u_1, \ldots, u_m$ différentiables par morceaux).

[Bien que nous n'ayons en fait besoin que des courbes différentiables, le fait d'introduire la classe plus vaste de courbes différentiables par morceaux simplifie sensiblement de nombreux raisonnements. En effet, cela évite cette opération fastidieuse et pénible qu'est l'arrondissement des angles.]

Nous dirons qu'une courbe $u : I \to \mathscr{B}$ *est contenue dans la carte* $(U, h) = (U, x^1, \ldots, x^m)$ si $u(t) \in U$ pour tout $t \in I$. Cette courbe est déterminée par les équations de la forme

$$x^k = x^k(t), \quad 1 \leqslant k \leqslant m, \quad t \in I,$$

et son relèvement $v : I \to \mathscr{E}$ (si l'on suppose qu'outre qu'il est un voisinage de coordonnées, U est encore trivialisant) est défini de plus par

$$(4) \qquad a^i = a^i(t), \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \quad t \in I.$$

Ce faisant, si u (donc v) est différentiable, la courbe v est horizontale si et seulement si

$$(5) \qquad \dot{a}^i(t) + \Gamma^i_{jk}(\mathrm{x}(t))\, a^j(t)\, \dot{x}^k(t) = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \quad t \in I$$

(voir formules (3) de la leçon 11).

Les équations (5) étant linéaires par rapport à $a^i(t)$, l'extrémité (vecteur) $p_1 \in \mathscr{F}_{b_1}$ du chemin v (repérée dans la fibre $\mathscr{F}_{b_1}$ par les coordonnées $a^i(1)$, $1 \leqslant i \leqslant n$) dépend linéairement de l'origine (vecteur) $p_0 \in \mathscr{F}_{b_0}$ de v, ce qui veut dire que *le transport parallèle* Π_u *est l'application linéaire* $\mathscr{F}_{b_0} \to \mathscr{F}_{b_1}$.

Si $\varphi : I' \to I$ est une fonction différentiable monotone à dérivée strictement positive (difféomorphisme conservant l'orientation) et que $v : I \to \mathscr{E}$ soit une courbe horizontale arbitraire soumise aux conditions (5), la courbe $v \circ \varphi : I' \to \mathscr{E}$ obtenue par un changement de

paramètre est définie par $a^i = a^i(\varphi(s))$, $x^k = x^k(\varphi(s))$, $s \in I'$, où $a^i(\varphi(s))^{\cdot} + \Gamma^i_{jk}(x(\varphi(s)))\, a^j(\varphi(s))\, x^k(\varphi(s))^{\cdot} =$

$$= \dot\varphi(s)\,[\dot a^i(t) + \Gamma^i_{jk}(x(t))\, a^j(t)\, \dot x^k(t)]_{t=\varphi(s)} = 0,$$

et c'est donc un relèvement horizontal de la courbe $u \circ \varphi : I \to \mathscr{B}$ due à un changement de paramètre. Il en découle que *tout paramétrage de* $u : I \to \mathscr{B}$ *conserve l'application* Π_u.

Ainsi, on suppose par exemple, sans restreindre la généralité, que $I = I$, avec $I = [0, 1]$ (i.e. la courbe u est un chemin).

Si le difféomorphisme φ renverse l'orientation (en envoyant l'origine de I' en l'extrémité de I et l'extrémité de I' en l'origine de I), la courbe $v \circ \varphi$ reste un relèvement horizontal de $u \circ \varphi$, mais cette dernière courbe joint le point b_1 au point b_0 (et $v \circ \varphi$ joint p_1 à p_0). Aussi, Π_u *est un isomorphisme* (qui admet l'application réciproque $\Pi_{u \circ \varphi}$).

Vu la compacité du segment I, toute courbe différentiable par morceaux u s'écrit $u_1 \ldots u_m$ dont chaque facteur est différentiable et contenu dans une carte. *L'application* Π_u *est* donc en vertu de (3) *l'isomorphisme* $\mathscr{F}_{b_0} \to \mathscr{F}_{b_1}$ *pour toute courbe différentiable par morceaux* u.

On voit de plus qu'*il existe pour toute courbe différentiable par morceaux* u *la formule*

$$\Pi_{u^{-1}} = \Pi_u^{-1},$$

où u^{-1} *désigne comme d'ordinaire la courbe parcourue dans le sens contraire.*

* * *

Le cas particulièrement intéressant est celui où la courbe différentiable par morceaux u est un *lacet* au point b_0, i.e. le cas de $b_1 = b_0$. L'application Π_u est en l'occurrence un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathscr{F}_0 = \mathscr{F}_{b_0}$ (opérateur linéaire non dégénéré), et tous les automorphismes Π_u forment un sous-groupe $\Phi = \Phi(b_0)$ du groupe Aut $\mathscr{F}_0$ (i.e. un sous-groupe du groupe GL $(n; \mathbb{R})$ si l'on suppose qu'une base est choisie dans $\mathscr{F}_0$).

On note que $\Pi_u p_0 = p_0$ *si et seulement si le relèvement horizontal* v *d'origine* p_0 *du lacet* u *est un lacet lui aussi.*

Définition 2. Le sous-groupe Φ du groupe de Lie Aut $\mathscr{F}_0$ (ou GL $(n; \mathbb{R})$) s'appelle *groupe d'holonomie* de la connexion H au point b_0.

Ce groupe ne dépend bien sûr que de la composante connexe contenant b_0 de la variété $\mathscr{B}$. Aussi, on suppose $\mathscr{B}$ connexe sans nuire à la généralité de l'exposé.

On rappelle (voir définition 1 de la leçon 3) que deux lacets $u_0 : I \to \mathscr{B}$ et $u_1 : I \to \mathscr{B}$ au point b_0 sont *homotopes* s'il existe une *homotopie*

qui les relie, i.e. s'il existe une application continue $F : I^2 \to \mathcal{B}$ pour laquelle

$$F(t, 0) = u_0(t), \quad F(t, 1) = u_1(t)$$

et

$$F(0, \tau) = F(1, \tau) = b_0$$

quels que soient $t, \tau \in I$.

La formule

$$u_\tau(t) = F(t, \tau), \quad t \in I,$$

définit pour tout $\tau \in I$ un lacet $u_\tau : I \to \mathcal{B}$. On dit des lacets u_τ, $\tau \in I$, qu'ils *constituent* l'homotopie F, et on identifie souvent la famille $\{u_\tau\}$ à F.

On a vu dans la leçon 3 que la relation d'homotopie des lacets est une relation d'équivalence.

Une homotopie F est *différentiable* si c'est une application différentiable $I^2 \to \mathcal{B}$, et elle est *différentiable par morceaux* s'il existe une subdivision du carré I^2 en des rectangles $I' \times I''$, $I' \subset I$, $I'' \subset \subset I$, sur chacun desquels F est différentiable. Les lacets reliés par une homotopie différentiable (resp. différentiable par morceaux) sont *différentiablement* (resp. *différentiablement par morceaux*) *homotopes*.

Problème 3. Démontrer que *si deux lacets différentiables* (resp. *différentiables par morceaux*) u_0 *et* u_1 *sont homotopes, ils le sont différentiablement* (resp. *différentiablement par morceaux*). [*Indication*. Utiliser le théorème de Weierstrass sur l'approximation des fonctions continues par les polynômes. Cf. proposition 2 de la leçon III.26.]

Un lacet u est *homotope à zéro* s'il existe une homotopie F qui relie u au lacet constant $e_{b_0} : t \mapsto b_0$. Conformément au problème 3, F est différentiable par morceaux si u l'est.

Il est clair (voir leçon 3) que le lacet opposé à un lacet homotope à zéro est homotope à zéro, ainsi que tout lacet composé de lacets ayant cette propriété. Il en résulte que *les applications* Π_u *associées aux lacets* u *homotopes à zéro constituent le sous-groupe* Φ_e *du groupe* Φ. Φ_e s'appelle *groupe d'holonomie restreint* de la connexion H au point b_0.

Proposition 1. *Le groupe* Φ *possède une structure naturelle de groupe de Lie par rapport à laquelle il est un sous-groupe de Lie du groupe de Lie* Aut $\mathcal{F}_0$ *et le groupe* Φ_e *est la composante de l'unité de* Φ. *Si la variété* $\mathcal{B}$ *vérifie le deuxième axiome de dénombrabilité, cette structure différentiable sur* Φ *est la plus faible* (*donc unique*).

D é m o n s t r a t i o n. On démontrera plus bas le

Lemme 1. *On relie chaque élément* $a = \Pi_u$ *du groupe* Φ_e *à l'unité par un chemin différentiable du groupe de Lie* Aut $\mathcal{F}_0$, *qui est entièrement dans* Φ_e.

Remarque 2. Les lacets u_τ constituant l'homotopie F qui relie le lacet u à un lacet constant définissent un chemin de Φ_e:

$$\Pi_F : \tau \mapsto \Pi_{u_\tau}, \quad \tau \in I. \tag{6}$$

Ce chemin joint l'élément a à l'application identique (unité de Φ_e). On a donc le lemme sous la condition suffisante que *l'application* Π_F *soit pour* F *différentiable un chemin différentiable de* Aut $\mathcal{F}_0$. Mais cette façon d'agir a beau être naturelle, elle se heurte à certaines difficultés, si bien qu'on construira un chemin Π_F (en fait le même) par un autre procédé qui en assure trivialement la différentiabilité.

Le lemme 1 signifie que le sous-groupe Φ_e satisfait aux conditions de la proposition 2 de la leçon 15. Selon cette proposition, il est donc muni de la topologie la plus faible qui en fait un sous-groupe de Lie connexe du groupe de Lie Aut $\mathcal{F}_0$. Aussi, Φ est un sous-groupe de Lie avec Φ_e pour composante de l'unité par rapport à la structure différentiable pour laquelle toutes les classes $a\Phi_e$ sont les composantes connexes (voir démonstration du théorème 2 de la leçon 15). Ainsi, on a la première affirmation de la proposition 1.

En vertu du théorème mentionné, il suffit de démontrer, pour avoir la seconde affirmation, que *si la variété* $\mathscr{B}$ *vérifie le deuxième axiome de dénombrabilité, le groupe quotient* Φ/Φ_e *est dénombrable* (*ou fini*). Soit $\pi_1(\mathscr{B}, b_0)$ le groupe fondamental de $\mathscr{B}$ au point b_0. Le problème 3 entraîne que chaque élément $\alpha \in \pi_1(\mathscr{B}, b_0)$ contient un lacet différentiable par morceaux u (i.e. $\alpha = [u]$). Π_u correspondant du groupe Φ est défini à un élément de Φ_e près, si bien que $\alpha \mapsto [\Pi_u]$, $[\Pi_u]$ étant la classe de Π_u suivant Φ_e, définit parfaitement une application

$$\pi_1(\mathscr{B}, b_0) \to \Phi/\Phi_e. \tag{7}$$

Lemme 2. *Pour toute variété connexe* $\mathscr{B}$ *vérifiant le deuxième axiome de dénombrabilité* (*et pour tout point* $b_0 \in \mathscr{B}$), *le groupe* $\pi_1(\mathscr{B}, b_0)$ *est au plus dénombrable.*

Comme (7) est évidemment un épimorphisme, cela achève la démonstration de la proposition 1. □

* * *

On a besoin, pour démontrer le lemme 1, de l'information supplémentaire sur les lacets en général et, en particulier, sur les lacets homotopes à zéro.

Un voisinage de coordonnées U de la variété $\mathscr{B}$ est dite *sphérique* s'il est difféomorphe à une boule ouverte de l'espace $\mathbb{R}^m$. Les voisinages sphériques constituent, c'est clair, une base des ouverts de $\mathscr{B}$.

Un *lasso à lacet* v est par définition un lacet wvw^{-1} en b_0, où w est un chemin d'origine b_0 et v un lacet en b_1, extrémité de w.

Un *lacet* u entièrement dans un voisinage sphérique est *petit* et on appelle *petit* un lasso wvw^{-1} avec v petit.

La connexité simple des boules (voir leçon 3) fait que chaque petit lacet est homotope à zéro, si bien qu'il en est de même de tout petit lasso.

Le lacet $u_1vv^{-1}u_2$ est le résultat d'une *transformation élémentaire* du lacet u_1u_2. Deux lacets sont dits *combinatoirement équivalents* si l'un s'obtient à partir de l'autre par un nombre fini de transformations élémentaires et de leurs inverses. (Autrement dit, on adjoint et on supprime les termes en vv^{-1}.)

Puisque $\Pi_{v^{-1}} = \Pi_v^{-1}$, *les lacets combinatoirement équivalents définissent un même élément* Π_u *du groupe* Φ.

Soit, dans le plan R^2, le carré Q_N de sommets aux points (0, 0), $(0, 2^N)$, $(2^N, 0)$ et $(2^N, 2^N)$. Les droites parallèles aux axes partagent Q_N en 2^{2N} carrés d'aire unité. La frontière de chaque carré partiel parcourue dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre plus une ligne brisée joignant le sommet (0, 0) de Q_N à un sommet du carré considéré définissent un lasso de Q_N dont nous dirons qu'il est *élémentaire.*

Soit q_N le lacet en (0, 0) obtenu quand on parcourt la frontière de Q_N dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre.

Lemme 3. *Le lacet* q_N *est combinatoirement équivalent au produit de lassos élémentaires.*

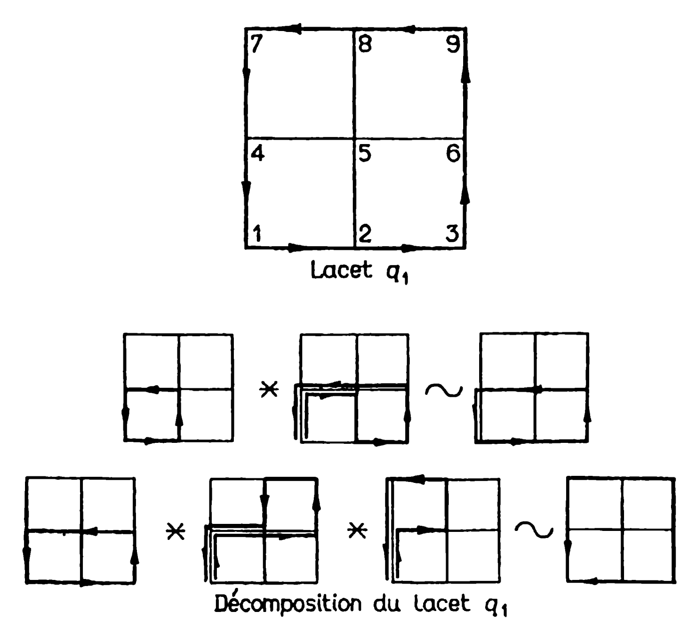
D é m o n s t r a t i o n. Si $N = 1$, le lacet q_1 est la ligne brisée 1 2 3 6 9 8 7 4 1, où 1 est le point (0, 0) et 2 le point (1, 0) (voir (fig. 4)) et il est combinatoirement équivalent au produit de lassos élémentaires

$$\text{(8)}\qquad \begin{matrix} 1\ 2\ 5\ 4\ 1, & 1\ 4\ 5\ 2\ 3\ 6\ 5\ 4\ 1, \\ 1\ 4\ 5\ 6\ 9\ 8\ 5\ 4\ 1, & 1\ 4\ 5\ 8\ 7\ 4\ 1. \end{matrix}$$

[Le lacet 1 2 5 4 1 n'est pas un lasso proprement dit, car le chemin w n'y figure pas. On en fait un lasso par l'adjonction du chemin 1 2 1.]

Supposons le lemme prouvé pour q_{N-1}. L'homothétie de rapport 2^{N-1} applique le carré Q_1 sur le carré Q_N et envoie les carrés unités formant Q_1 en quatre carrés de côté 2^{N-1} formant Q_N. Aussi, le lacet q_N est combinatoirement équivalent au produit de quatre lassos homothétiques aux lassos (8) (on vient de le prouver). D'autre part, les lacets de ceux-ci sont combinatoirement équivalents par hypothèse de récurrence au produit de lassos élémentaires (partant des points correspondants de Q_N). Or, si le lacet u du lasso wuw^{-1} est combinatoirement équivalent au produit de lacets $u_1, \ldots, u_n$, alors wuw^{-1} l'est automatiquement au produit de lacets

$$\text{(9)}\qquad wu_1w^{-1}, \ldots, wu_nw^{-1},$$



Décomposition du lacet q_1

Fig. 4,

et si $u_1, \ldots, u_n$ sont autant de lassos élémentaires (à l'extrémité du chemin w), les lacets (9) en sont d'autres (à l'origine de w). Cela prouve manifestement le lemme 3. □

Corollaire 1. *Chaque lacet u homotope à zéro de la variété $\mathscr{B}$ est combinatoirement équivalent au produit de petits lassos.*

Démonstration. On suppose sans restreindre la généralité que l'homotopie F reliant le lacet u à un lacet constant est une application $Q_N \to \mathscr{B}$, N étant un nombre quelconque donné à l'avance. Si N est suffisamment important, chaque carré unité partiel de Q_N est appliqué par F dans un voisinage sphérique de $\mathscr{B}$, si bien que chaque lasso élémentaire est envoyé en un lasso petit de $\mathscr{B}$. D'autre part F envoie par hypothèse le lacet frontière q_N en un lacet produit de u et d'un lacet constant, qui est par conséquent combinatoirement équivalent à u. Ainsi, le lacet u est combinatoirement équivalent par le lemme 3 au produit de petits lassos. □

* * *

Le corollaire 1 implique que tout élément du groupe Φ_e est produit d'éléments Π_u associés aux petits lassos u. Il suffit donc de démontrer le lemme 1 pour ces Π_u.

On affaiblit cette condition.

Soient b_0 et b_1 deux points de $\mathscr{B}$ reliés par le chemin w. Chaque lacet u_1 en b_1 définit le lacet (lasso) wu_1w^{-1} en b_0, et chaque lacet u_0 en b_0 définit le lacet $w^{-1}u_0w$ en b_1, et ces correspondances sont réciproquement inverses à l'équivalence combinatoire près. Aussi, elles induisent l'isomorphisme du groupe d'holonomie $\Phi(b_1)$ en b_1 sur le groupe d'holonomie $\Phi(b_0)$ en b_0. Plus précisément, si l'on choisit des bases dans les espaces $\mathscr{F}_{b_0}$ et $\mathscr{F}_{b_1}$ et qu'on considère en conséquence les groupes $\Phi(b_0)$ et $\Phi(b_1)$ comme sous-groupes du groupe GL $(n; \mathbb{R})$ cet isomorphisme est, on le voit aisément, l'application identique dans l'hypothèse où la base de $\mathscr{F}_{b_1}$ est obtenue à partir de celle de $\mathscr{F}_{b_0}$ par le transport parallèle le long du chemin w. Si un élément du groupe $\Phi(b_1)$ (associé, disons, au lacet u) est joint à l'unité par un chemin différentiable (dans Aut $\mathscr{F}_{b_1}$) tout entier dans $\Phi(b_1)$, l'élément correspondant du groupe $\Phi(b_0)$ (associé au lasso à lacet u) est donc relié à l'unité par un chemin différentiable (dans Aut $\mathscr{F}_{b_0}$) contenu dans $\Phi(b_0)$.

Par conséquent, il suffit de démontrer le lemme 1 pour $a = \Pi_u$ associés aux petits lacets u (entièrement dans un voisinage sphérique U du point b_0).

Ces éléments sont susceptibles de la construction de la remarque 2.

D é m o n s t r a t i o n du lemme 1. On vient de démontrer que le lacet u peut être supposé (sans que cela nuise à la généralité) contenu tout entier dans un voisinage sphérique trivialisant U.

Soient $x^k = x^k(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $k = 1, \ldots, m$, les équations paramétriques en coordonnées locales centrées en b_0 du lacet u, auquel cas les formules

$$x^k = \tau x^k(t), \quad 0 \leqslant t, \quad \tau \leqslant 1, \quad 1 \leqslant k \leqslant m, \tag{10}$$

définissent l'homotopie $F: I^2 \to \mathscr{B}$ qui relie le lacet constant en b_0 au lacet u. Les lacets u_τ correspondants sont donc définis par (10) (avec τ constant), et ils se relèvent par conséquent en les courbes (et non en les lacets !) $v_\tau: I \to \mathscr{E}$ avec les équations paramétriques (10) et $a^i = a^i_\tau(t)$, $a^i_\tau(t)$ étant les solutions de

$$\dot{a}^i_\tau(t) + \tau\Gamma^i_{kj}(\tau x(t))\, a^j_\tau(t)\, \dot{x}^k(t) = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Or, on connaît un théorème du cours d'équations différentielles qui dit que leurs solutions dépendent différentiablement du paramètre, si bien que $a^i_\tau(t)$ dépendent différentiablement de τ (avec les conditions initiales données $a^i_\tau(0) = a^i_0$). C'est vrai en particulier pour les valeurs à l'extrémité $a^i_\tau(1)$.

D'autre part, si a^i_0 sont les coordonnées du point $p_0 \in \mathscr{F}_0$, les nombres $a^i_\tau(1)$ sont par définition les coordonnées de $\Pi_{u_\tau}(p_0)$. Ce dernier point dépend donc différentiablement de τ, i.e. il y a différentiabilité de l'application $\mathscr{F}_0 \times I \to \mathscr{F}_0$ définie par $(p_0, \tau) \mapsto$

$\mapsto \Pi_{u_\tau}(p_0)$. Dans ce cas, on établit aisément (voir lemme 1 de la leçon 6) qu'il en est de même pour l'application $\tau \mapsto \Pi_{u_\tau}$ de I dans $\mathrm{Aut}\, \mathcal{F}_0$, i.e. le chemin (6) est différentiable. □

* * *

Nous signalons qu'au cours de la démonstration du lemme 1, nous avons de plus prouvé que dans l'hypothèse de $\mathcal{B}$ connexe, les groupes d'holonomie $\Phi(b_0)$ et $\Phi(b_1)$ en b_0, $b_1 \in \mathcal{B}$ distincts sont isomorphes. L'isomorphisme $\Phi(b_1) \to \Phi(b_0)$ dépend du chemin w joignant b_0 à b_1, et il est défini par la correspondance $u \mapsto w^{-1}uw$. Si l'on choisit des bases de $\mathcal{F}_{b_0}$, $\mathcal{F}_{b_1}$ (si bien qu'on regarde les groupes $\Phi(b_0)$, $\Phi(b_1)$ comme sous-groupes du groupe $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$) et que la base de $\mathcal{F}_{b_1}$ s'obtienne de celle de $\mathcal{F}_{b_0}$ par transport parallèle le long du chemin w, cet isomorphisme est l'identité. Aussi est-il en tout cas l'application différentiable $\Phi(b_1) \to \Phi(b_0)$ (on rappelle que chaque $\Phi(b)$ possède la structure différentiable la plus faible), donc un difféomorphisme. Ainsi, on a prouvé que *les groupes d'holonomie* $\Phi(b_0)$ *et* $\Phi(b_1)$ *en* b_0, $b_1 \in \mathcal{B}$ *distincts sont isomorphes en tant que groupes de Lie.*

* * *

Passons au lemme 2.

Soit $\mathcal{B}$ une variété différentiable quelconque qui vérifie le deuxième axiome de dénombrabilité, et soit $b_0 \in \mathcal{B}$.

Problème 4. Montrer que $\mathcal{B}$ remplit le deuxième axiome de dénombrabilité si et seulement si elle admet un recouvrement ouvert dénombrable $\{U_i\}$ formé de voisinages sphériques U_i.

On rappelle qu'un sous-ensemble C d'un espace topologique $\mathcal{B}$ est *partout dense* (dans $\mathcal{B}$) si $\overline{C} = \mathcal{B}$.

Problème 5. Montrer que *toute variété* $\mathcal{B}$ *vérifiant le deuxième axiome de dénombrabilité contient un sous-ensemble dénombrable partout dense* C. [*Indication.* Poser $C = \bigcup C_i$, avec C_i un sous-ensemble de U_i (voir problème 4) formé de points repérés par les coordonnées rationnelles.]

On peut estimer sans restreindre la généralité que C contient le point b_0.

On fixe une fois pour toutes l'atlas dénombrable $\{(U_i, h_i)\}$ et le sous-ensemble C et on dit qu'un chemin u de $\mathcal{B}$ est *élémentaire* si

a) son origine et son extrémité sont dans C;

b) le chemin u est entièrement dans un voisinage U_i;

c) le chemin $h_i \circ u$ de l'espace $\mathbb{R}^m$ est un segment rectiligne (paramétré de façon naturelle).

Faute de mieux, un chemin composé de chemins élémentaires sera dit *spécial.*

La dénombrabilité de l'ensemble de tous les chemins spéciaux tombe sous le sens. Aussi, il suffit de démontrer (pour avoir le résultat du lemme 2) que *chaque lacet en* $b_0 \in \mathscr{B}$ *est homotope à un lacet spécial.*

La démonstration de cette affirmation doit être précédée d'une généralisation de la notion d'homotopie des chemins.

Nous dirons d'une application continue arbitraire $F: I^2 \to \mathscr{B}$ du carré I^2 dans une variété (ou, plus généralement, dans un espace topologique) $\mathscr{B}$ qu'elle est une *homotopie avec origine et extrémité libres*. S'agissant d'une telle homotopie, les formules

$$u_0(t) = F(t, 0), \quad u_1(t) = F(t, 1), \quad t \in I,$$
$$v_0(\tau) = F(0, \tau), \quad v_1(\tau) = F(1, \tau), \quad \tau \in I,$$

définissent quatre chemins

$$u_0, u_1, v_0, v_1 : I \to \mathscr{B}.$$

Nous dirons que *l'homotopie* F *relie le chemin* u_0 *au chemin* u_1 *pour le chemin initial* v_0 *et le chemin terminal* v_1.

On note que

$$u_0(0) = v_0(0), \quad v_0(1) = u_1(0),$$
$$u_0(1) = v_1(0), \quad v_1(1) = u_1(1). \tag{11}$$

Les homotopies au sens de la définition 1 de la leçon 3 sont précisément les homotopies F avec v_0 et v_1 constants.

Lemme 4. *Un espace topologique connexe par arcs* $\mathscr{B}$ *est simplement connexe si et seulement si pour n'importe quels chemins* $u_0, u_1, v_0, v_1 \in \mathscr{B}$ *vérifiant les relations* (11), *il existe une homotopie* F *qui relie* u_0 *à* u_1 *pour le chemin initial* v_0 *et le chemin terminal* v_1.

D é m o n s t r a t i o n. La connexité simple de $\mathscr{B}$ signifie par définition qu'on trouve pour tout lacet u une homotopie F telle que $u_0 = u$ et les chemins u_1, v_0 et v_1 soient constants. Par conséquent, l'hypothèse du lemme suffit pour que $\mathscr{B}$ soit simplement connexe.

On montre qu'il s'agit d'une condition nécessaire.

Soient, dans un espace simplement connexe $\mathscr{B}$, les chemins u_0, u_1, v_0, v_1 satisfaisant aux conditions (11). La formule

$$f(t, \tau) = \begin{cases} u_0(t) & \text{si } \tau = 0, \\ u_1(t) & \text{si } \tau = 1, \\ v_0(\tau) & \text{si } t = 0, \\ v_1(\tau) & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

définit bien une application continue $f: \partial I^2 \to \mathscr{B}$ de la frontière ∂I^2 du carré I^2 dans $\mathscr{B}$, et le problème consiste à prolonger f à tout le carré I^2, i.e. on doit construire une application $F: I^2 \to \mathscr{B}$ telle que $F|_{\partial I^2} = f$.

Problème 6. Construire une application continue $\varphi: I^2 \to I^2$ qui 1° est un homéomorphisme de l'intérieur de I^2 sur lui-même; 2° applique le côté supérieur $I \times 1$ de I^2 sur la frontière ∂I^2; 3° envoie les côtés restants de I^2 en le point (0, 0).

Soit g l'application $\partial I^2 \to \mathscr{B}$ qui est la composée de φ (plus précisément de sa restriction $\varphi|_{\partial I^2}$) et de l'application f. Elle définit sur tous les côtés de I^2, sauf le côté supérieur, des chemins constants et, sur $I \times 1$, un lacet qui est (à un changement de paramètre près en général) le produit $u_0 v_1 u_1^{-1} v_0^{-1}$ des chemins u_0, v_1, u_1^{-1} et v_0^{-1}.

L'espace $\mathscr{B}$ étant simplement connexe, le dernier lacet est homotope à zéro, si bien qu'on a l'homotopie $G: I^2 \to \mathscr{B}$, avec $G|_{\partial I^2} = g$ (qui prolonge l'application g). Comme les côtés de I^2, envoyés en un point par φ le sont également par G, il existe une application (manifestement continue et unique) $F: I^2 \to \mathscr{B}$ telle que $G = F \circ \varphi$. Dans ce cas, $g = (F|_{\partial I^2}) \circ \varphi$, d'où $F|_{\partial I^2} = f$ par suite de l'égalité $g = f \circ \varphi$, ce qui achève la démonstration du lemme 4. □

Corollaire 1. *Un espace topologique connexe par arcs $\mathscr{B}$ est simplement connexe si et seulement si tous les chemins reliant un point b_0 quelconque de $\mathscr{B}$ à un point b_1 quelconque de $\mathscr{B}$ sont homotopes.*

Problème 7. Déduire ce corollaire des propriétés algébriques de la multiplication des classes d'homotopie (voir leçon 3).

Dans la leçon 3, on a introduit les opérations de multiplication des homotopies par rapport au premier ou au deuxième argument (voir formules (2) et (3) de la leçon citée). Ces opérations ont visiblement un sens (sous des conditions adéquates) pour les homotopies avec origine et extrémité libres. En particulier, le produit FG de deux homotopies par rapport au deuxième argument est défini si et seulement si le chemin terminal de F coïncide avec le chemin initial de G, auquel cas FG est une homotopie dont le chemin initial est celui de F et dont le chemin terminal est celui de G.

Fort de ces résultats, on passe directement à la

D é m o n s t r a t i o n du lemme 2. Soit u un lacet quelconque de $\mathscr{B}$ au point b_0. Il faut démontrer que u est homotope à un lacet spécial.

Le caractère compact du segment I fait qu'il existe dans l'atlas dénombrable donné de $\mathscr{B}$ un système fini de cartes (U_i, h_i), $1 \leqslant i \leqslant N$, tel que le lacet u s'écrive $u_1 \ldots u_N$, où le chemin u_i est tout entier, pour tout $i = 1, \ldots, N$, dans le voisinage sphérique U_i. Soit b_{i-1} l'origine de u_i dont l'extrémité est donc b_i. (Ainsi $b_N = b_0$.)

Comme $b_i \in U_i \cap U_{i+1}$ pour tout $i = 1, \ldots, N-1$ et C est un ensemble partout dense, on trouve pour tout $i = 1, \ldots, N-1$ un point $c_i \in C$ appartenant à la composante connexe par arcs de $U_i \cap U_{i+1}$ qui contient b_i. (Si $i = 0$ et $i = N$, on exige de plus que $c_0 = c_N = b_0$.)

Soit v_i un chemin quelconque de $U_i \cap U_{i+1}$ qui joint b_i à c_i. (Si $i = 0$ et $i = N$, on assimile v_i au chemin constant en b_0.)

Puisque $c_{i-1}, c_i \in U_i$, $i = 1, \ldots, N$, on définit dans U_i le chemin élémentaire w_i joignant c_{i-1} à c_i.

Quel que soit $i = 1, \ldots, N$, les chemins u_i, w_{i-1}, v_{i-1}, v_i sont entièrement dans l'ensemble simplement connexe U_i et vérifient évidemment les conditions du lemme 4. Aussi, il existe par ce lemme (dans U_i, donc dans $\mathscr{B}$) une homotopie F_i qui relie u_i à w_i pour le chemin initial v_{i-1} et le chemin terminal v_i, auquel cas l'homotopie $F_1 \ldots F_N$ est définie, elle relie le lacet $u = u_1 \ldots u_N$ au lacet spécial $w = w_1 \ldots w_N$ et constitue (en raison du choix des chemins v_0 et v_N) une homotopie avec origine et extrémité fixes.

Ainsi, le lacet u est homotope au lacet spécial w. □

* * *

Le rôle que les groupes d'holonomie jouent en théorie des fibrés vectoriels est déterminé pour beaucoup par le

Théorème 1. (Théorème de réduction.) *Tout fibré vectoriel* $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ *admettant une connexion à groupe d'holonomie* Φ *est réductible au groupe* Φ (*considéré comme un sous-groupe de* GL $(n; \mathbb{R})$).

D é m o n s t r a t i o n. Soit U un voisinage sphérique quelconque dans la variété $\mathscr{B}$, et soient b^U son centre, et $\mathbf{p}^U$ une base de l'espace vectoriel $\mathscr{F}_{b^U}$. On désigne par w_b^U, $b \in U$ quelconque, le chemin élémentaire de U qui joint b^U à b, par Π_b^U le transport parallèle correspondant $\mathscr{F}_{b^U} \to \mathscr{F}_b$ et par $\mathbf{s}(b) = (s_1(b), \ldots, s_n(b))$ la base $\Pi_p^U \mathbf{p}^U$ de l'espace vectoriel $\mathscr{F}_b$, $b \in U$ (si bien que $\mathbf{s}(b^U) = \mathbf{p}^U$).

Problème 8. Démontrer que *la base* $\mathbf{s}(b)$ *dépend différentiablement de* b, i.e. que les sections $s_i : b \mapsto s_i(b)$, $i = 1, \ldots, n$, appartiennent à $\Gamma(\xi|_U)$ (et constituent donc une base de ce $\mathsf{F}U$-module).

Il s'ensuit que la formule

$$\varphi_1(b, \mathbf{a}) = a^i s_i(b), \quad b \in U, \ \mathbf{a} = (a^1, \ldots, a^n) \in \mathbb{R}^n,$$

définit une trivialisation différentiable

$$\varphi : U \times \mathbb{R}^n \to \mathscr{E}_U \tag{12}$$

du fibré ξ au-dessus de U. [On souligne la dépendance de cette trivialisation vis-à-vis du choix de $\mathbf{p}^U$.]

Si l'on veut employer un procédé uniforme pour choisir les bases $\mathbf{p}^U$ pour tous les voisinages U, on doit se rappeler qu'on a fixé dans $\mathscr{B}$ un point b_0 (par rapport auquel on définit le groupe d'holonomie Φ). On en tient compte et on prend dans l'espace vectoriel $\mathscr{F}_0 = \mathscr{F}_{b_0}$ une base $\mathbf{p}_0$ quelconque (et on définit par là même le groupe Φ en tant que sous-groupe du groupe GL $(n; \mathbb{R})$). On choisit

pour chaque voisinage de coordonnées sphérique U un chemin $v^U \in \in \mathscr{B}$ reliant le point b_0 au centre b^U de U et on adopte en qualité de p^U le résultat $\Pi_v \mathrm{p}_0$ du transport parallèle de p_0 le long du chemin $v = v^U$.

Ainsi, on a construit une trivialisation (12) au-dessus de chaque voisinage sphérique U de $\mathscr{B}$, i.e. on a obtenu un atlas trivialisant du fibré ξ. [Cet atlas ne dépend que de la base p_0 de $\mathcal{F}_0$ et des chemins v^U joignant b_0 aux centres b^U des voisinages U.]

Soient U_1 et U_2 deux voisinages sphériques, $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$, φ_1 et φ_2 deux trivialisations (12) correspondantes, et φ_{21} l'application de transition $U_1 \cap U_2 \to \mathrm{GL}\,(n; \mathbb{R})$. On identifie à l'aide de p_0 le groupe $\mathrm{GL}\,(n; \mathbb{R})$ au groupe $\mathrm{Aut}\, \mathcal{F}_0$, et on peut affirmer que

$$\varphi_{21}\colon\ U_1 \cap U_2 \to \mathrm{Aut}\, \mathcal{F}_0,$$

i.e. que $\varphi_{21}(b)\colon \mathcal{F}_0 \to \mathcal{F}_0$ pour tout point $b \in U_1 \cap U_2$.

Pareillement, on dit que les applications $\varphi_{1,\,b}$ et $\varphi_{2,\,b}$ (pour les points b de U_1 et U_2 respectivement) opèrent de $\mathcal{F}_0$ dans $\mathcal{F}_b$:

$$\mathcal{F}_0 \xrightarrow{\varphi_{1,\,b}} \mathcal{F}_b \xleftarrow{\varphi_{2,\,b}} \mathcal{F}_0.$$

Mais on obtient de suite par définition :

$$\varphi_{1,\,b} = \Pi_b^{U_1} \circ \Pi_{vU_1} = \Pi_{vU_1 w_b^{U_1}},$$

$$\varphi_{2,\,b} = \Pi_b^{U_2} \circ \Pi_{vU_2} = \Pi_{vU_2 w_b^{U_2}},$$

donc

$$\varphi_{21}(b) = \varphi_{2,\,b}^{-1} \circ \varphi_{1,\,b} = \Pi^{-1}_{vU_2 w_b^{U_2}} \circ \Pi_{vU_1 w_b^{U_1}} = \Pi_w,$$

où w est le lacet $v^{U_1} w_b^{U_1} (w_b^{U_2})^{-1} (v^{U_2})^{-1}$ au point b_0.

Ainsi, l'application de transition φ_{21} prend ses valeurs dans le sous-groupe Φ du groupe $\mathrm{Aut}\, \mathcal{F}_{b_0}$.

Cela signifie par définition que le cocycle matriciel φ associé à l'atlas trivialisant construit est un cocycle sur Φ. Par conséquent, le fibré vectoriel ξ se réduit au groupe Φ (voir définition 1 de la leçon 7). □

* * *

On note que nous avons démontré sans s'y arrêter le résultat suivant : *le fibré vectoriel ξ est trivialisable au-dessus de chaque voisinage sphérique de la variété $\mathscr{B}$.*

Cette affirmation s'appuie visiblement sur l'existence d'une connexion H sur ξ. Il paraît donc nécessaire de voir les conditions sous lesquelles il existe sur ξ au moins une connexion. On utilise à

cet effet la correspondance biunivoque (voir leçon 12) entre les connexions et les dérivations covariantes:

(13) $$\nabla : \Gamma\xi \to \Gamma(\tau^*_{\mathscr{B}} \otimes \xi).$$

Soit E l'espace vectoriel (voire un $F\mathscr{B}$-module) de toutes les applications $\mathbb{R}$-linéaires $\Gamma\xi \to \Gamma(\tau^*_{\mathscr{B}} \otimes \xi)$, et soit ∇ son sous-espace (un $F\mathscr{B}$-sous-module) des applications $F\mathscr{B}$-linéaires. L'ensemble D de toutes les dérivations covariantes (13) est dans E sans en être un sous-espace (ne serait-ce que parce que la somme $\nabla_1 + \nabla_2$ de deux dérivations de D n'est manifestement pas dans D). Mais on établit immédiatement que *quelles que soient* ∇_1 *et* ∇_2 *et la fonction* $f \in F\mathscr{B}$, *l'application*

(14) $$\nabla = (1 - f)\nabla_1 + f\nabla_2$$

est encore une dérivation.

Il y a plus. Si $\{\eta_\alpha\}$ est une partition de l'unité arbitraire (voir leçon III.22), alors l'application

(15) $$\nabla = \sum_\alpha \eta_\alpha \nabla_\alpha$$

(qui a un sens puisque $\{\eta_\alpha\}$ est localement finie) est une dérivation pour toute famille $\{\nabla_\alpha\}$ de dérivations. Si la partition de l'unité $\{\eta_\alpha\}$ est subordonnée au recouvrement $\{U_\alpha\}$, l'application (15) est évidemment définie (et elle est une dérivation) même si chaque ∇_α n'est définie que sur U_α (pour le fibré $\xi|_{U_\alpha}$).

On voit d'ailleurs que si $\xi|_{U_\alpha}$ est trivial, il existe nécessairement au moins une dérivation ∇_α sur U_α. Aussi, il existe sur $\mathscr{B}$ tout entière la dérivation (15), d'où l'existence de la connexion correspondante. Nous avons donc établi la

Proposition 2. *Sur chaque fibré vectoriel différentiable numérotable* ξ (voir leçon 7), *il existe au moins une connexion.*

A vrai dire, nous avons pu (et dû) énoncer et prouver cette affirmation dès la leçon 13. Si nous ne l'avons pas fait en temps et lieu, c'est qu'elle n'entraîne que maintenant les résultats significatifs suivants.

Corollaire 1. *Chaque fibré vectoriel différentiable* $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ *sur une variété paracompacte* $\mathscr{B}$ *admet au moins une connexion.*

Corollaire 2. *Chaque fibré vectoriel différentiable* $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ *sur une variété paracompacte* $\mathscr{B}$ *est trivialisable au-dessus de tout voisinage sphérique* U.

Autrement dit, chaque recouvrement $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$ de $\mathscr{B}$ formé de voisinages sphériques constitue un recouvrement trivialisation universelle (voir remarque 4 de la leçon 6).

* * *

L'ensemble de dérivations (= connexions) de la forme (14) admet une interprétation intéressante du point de vue de la théorie générale des espaces affines.

On rappelle (voir définition 3 de la leçon I.4) qu'un ensemble (non vide!) $\mathscr{A}$ s'appelle espace affine attaché à l'espace vectoriel $\mathscr{V}$ si l'on a l'application

$$\mathscr{A} \times \mathscr{A} \to \mathscr{V}, \quad (A, B) \mapsto \overrightarrow{AB}, \tag{16}$$

telle que

a) pour tout vecteur $\mathbf{a} \in \mathscr{V}$ et tout point $A \in \mathscr{A}$, il existe un seul point B pour lequel $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$;

b) quels que soient les points $A, B, C \in \mathscr{A}$, on a l'égalité

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Chose importante, cette définition n'utilise aucunement l'opération de division dans le corps de base K, si bien qu'*elle a également un sens si $\mathscr{V}$ n'est pas un espace vectoriel, mais un module sur un anneau* K.

S'agissant de l'ensemble D, l'anneau K est l'anneau des fonctions $\mathsf{F}\mathscr{B}$, le rôle du module $\mathscr{V}$ incombe au sous-module H, et l'application (16) est définie par la formule

$$(\nabla_1, \nabla_2) \mapsto \nabla_2 - \nabla_1, \quad \nabla_1 \nabla_2 \in \mathsf{D}.$$

[On a $\nabla_2 - \nabla_1 \in \mathsf{H}$ puisque les termes $Xf \cdot s$ se simplifient quand on fait la différence de deux formules de Leibniz pour $\nabla_2 (fs)$ et $\nabla_1 (fs)$. L'axiome b) se ramène à l'identité triviale

$$\nabla_3 - \nabla_1 = (\nabla_3 - \nabla_2) + (\nabla_2 - \nabla_1),$$

et l'axiome a) à l'affirmation: pour toute dérivation ∇ et toute application $\mathsf{F}\mathscr{B}$-linéaire $\boldsymbol{\delta} \in \mathsf{H}$, l'application $\nabla + \boldsymbol{\delta}$ est une dérivation (vérification automatique).]

Ainsi, l'*ensemble* D *de toutes les dérivations covariantes* (*ou*, *ce qui revient au même*, *de toutes les connexions*) *sur un fibré vectoriel différentiable* $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ *est* (*quand il n'est pas vide*) *un espace affine attaché au* $\mathsf{F}\mathscr{B}$*-module* H.

Si l'on adopte ce point de vue, l'ensemble des dérivations (14) n'est autre qu'une droite dans l'espace affine D.

LEÇON 19

Calcul du transport parallèle le long d'un lacet. — Opérateur courbure en un point donné. — Transport d'un vecteur le long d'un parallélogramme infinitésimal. — Tenseur de courbure. — Formule pour transformer les composantes du tenseur de courbure. — Opérateur courbure exprimé par les dérivées covariantes. — Equation de structure d'Elie Cartan. — Identité de Bianchi.

Soit $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ un fibré vectoriel différentiable de rang n sur une variété $\mathscr{B}$ de dimension m où l'on a choisi un point b_0, et soit H une connexion sur ξ. Chaque lacet différentiable $u: I \to \mathscr{B}$ au point b_0 définit l'application (voir leçon 18)

$$\Pi_u : \mathscr{F}_0 \to \mathscr{F}_0, \quad \mathscr{F}_0 = \mathscr{F}_{b_0},$$

qui est l'identité pour u constant.

On fixe une fois pour toutes le voisinage de coordonnées trivialisant U du point b_0 de $\mathscr{B}$, les coordonnées $x^1, \ldots, x^m$ dans U qui sont centrées en b_0 et la trivialisation $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n)$ du fibré ξ au-dessus de U (i.e. une base du $\mathsf{F}\mathscr{B}$-module $\Gamma\xi$ sur U). Tout lacet u entièrement intérieur à U a pour équation paramétrique vectorielle

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{1}$$

où $\mathbf{x}(t) = (x^1(t), \ldots, x^m(t))$ est une fonction vecteur différentiable telle que $\mathbf{x}(0) = 0$, $\mathbf{x}(1) = 0$ et l'application Π_u envoie le point $p_0 \in \mathscr{F}_0$ de coordonnées $\mathbf{a}_0 = (a_0^1, \ldots, a_0^n)$ dans la base $\mathbf{s}(b_0)$ de l'espace vectoriel $\mathscr{F}_0$ en le point $p_1 = \Pi_u p_0$ dont les coordonnées dans la même base sont $\mathbf{a}_1 = (a^1(1), \ldots, a^n(1))$. $a^i(1)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont les valeurs des fonctions $a^i(t)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $t = 1$, solutions des équations différentielles

$$\dot{a}^i(t) + \Gamma^i_{kj}(\mathbf{x}(t))\, \dot{x}^k(t)\, a^j(t) = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

avec les conditions initiales $a^i(0) = a_0^i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. (Il est en particulier immédiat que l'application Π_u est linéaire et bijective, i.e. c'est un opérateur linéaire non dégénéré sur $\mathscr{F}_0$; cf. leçon 18.)

Il y a avantage à remplacer les équations différentielles (2) par les équations intégrales équivalentes

$$a^i(t) = a_0^i - \int_0^t \Gamma^i_{kj}(\mathbf{x}(t))\, \dot{x}^k(t)\, a^j(t)\, dt, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

car on utilise dans ce cas la méthode des approximations successives.

On estime sans restreindre la généralité que la fermeture $\overline{U}$ de U est compacte, auquel cas les fonctions différentiables Γ^i_{kj} sont bornées sur U, i.e. il existe une constante $C > 0$ telle que

(4) $$|\Gamma^i_{kj}| < C \text{ sur } U$$

pour tous les i, j et k.

Le lacet (1) est *de dimension* $\leqslant s$ si

(5) $$|\dot{x}^k(t)| \leqslant s$$

quels que soient t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, et $k = 1, \ldots, m$.

On note que pour tout lacet pareil

(6) $$|x^k(t)| \leqslant s$$

quels que soient t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, et $k = 1, \ldots, m$.

En effet,

$$|x^k(t)| = \left| \int_0^t \dot{x}^k(t)\,dt \right| \leqslant \int_0^t |\dot{x}^k(t)|\,dt \leqslant st \leqslant s$$

puisque $x^k(0) = 0$. □

Lemme 1. *Il existe des constantes C_1 et C_2 telles que les solutions $a^i(t)$ des équations* (3) *admettent pour tout lacet différentiable (voire différentiable par morceaux) u de dimension $\leqslant s$ l'estimation*

(7) $$|a^i(t)| \leqslant C_2 e^{C_1 st},$$

avec n'importe quels t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, et $i = 1, \ldots, n$.

Démonstration. Soit

$$a(t)^2 = \sum_{i=1}^{n} (a^i(t))^2.$$

Alors

$$a(t)\,\dot{a}(t) = \sum_{i=1}^{n} a^i(t)\,\dot{a}^i(t) = -\sum_{i=1}^{n} \Gamma^i_{kj}(\mathrm{x}(t))\,\dot{x}^k(t)\,a^i(t)\,a^j(t),$$

donc

$$a(t)\,|\dot{a}(t)| \leqslant mCs \sum_{i,\,j=1}^{n} |a^i(t)|\,|a^j(t)|,$$

avec C figurant dans (4). D'autre part, tout a et tout b positifs vérifient

$$ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$$

(parce que $(a - b)^2 \geqslant 0$), si bien que

$$\sum_{i,\, j=1}^{n} |a^i(t)|\, |a^j(t)| \leqslant \frac{n}{2} \Big(\sum_{i=1}^{n} (a^i(t))^2 + \sum_{j=1}^{n} (a^j(t))^2 \Big) = na(t)^2.$$

La simplification par $a(t)$ donne

$$|\dot{a}(t)| \leqslant C_1 s a(t), \quad \text{où } C_1 = nmC,$$

i.e.

$$\left| \frac{\mathrm{d} \ln a(t)}{\mathrm{d}t} \right| \leqslant C_1 s.$$

Dans ce cas,

$$|\ln a(t) - \ln a(0)| = \left| \int_0^t \frac{\mathrm{d} \ln a(t)}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_0^t \left| \frac{\mathrm{d} \ln a(t)}{\mathrm{d}t} \right| \mathrm{d}t \leqslant C_1 st,$$

donc

$$a(t) \leqslant a(0)\, \mathrm{e}^{C_1 st},$$

ce qui prouve (7) vu que $| a^i(t) | \leqslant a(t)$. □

On fixe $s_0 > 0$ et on suppose que $0 \leqslant s \leqslant s_0$.

Corollaire 1. *Il existe une constante C telle qu'on ait pour tout lacet u de dimension $\leqslant s$*

(8) $$|a^i(t)| \leqslant C$$

quels que soient t $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ et i $(i = 1, \ldots, n)$.

D é m o n s t r a t i o n. Conformément à la formule (7),

$$|a^i(t)| \leqslant C_2 \mathrm{e}^{C_1 s_0}. \ \square$$

Avec ces résultats, on utilise la méthode des approximations successives pour le système (3) et le lacet u de dimension $\leqslant s$.

Première approximation. Les inégalités (4), (5) et (6) entraînent pour une constante C

$$|a^i(t) - a_0^i| \leqslant Cst,$$

i.e.

$$a^i(t) = a_0^i + O(st),$$

où $O(st)$ est une fonction telle que le rapport $\frac{O(st)}{st}$ soit borné lorsque $0 \leqslant t \leqslant 1$ et $0 < s \leqslant s_0$.

Deuxième approximation. La formule des accroissements finis de Lagrange et l'estimation (5) impliquent

$$\Gamma_{kj}^i(\mathbf{x}(t)) = \Gamma_{kj}^i(0) + O(st),$$

$\Gamma^i_{kj}(0)$ étant les valeurs de Γ^i_{kj} au point b_0 (pour $\mathbf{x}=0$). Aussi

$$a^i(t)=a^i_0-\int_0^t [\Gamma^i_{kj}(0)+O(st)][a^j_0+O(st)]\,\dot{x}^k(t)\,dt=$$

$$=a^i_0-\Gamma^i_{jk}(0)\,a^j_0\int_0^t \dot{x}^k(t)\,dt+O(s^2t),$$

i.e.

$$a^i(t)=a^i_0-\Gamma^i_{kj}(0)\,a^j_0x^k(t)+O(s^2t).$$

Troisième approximation. La formule de Taylor avec reste et les inégalités (5) et (6) donnent

$$\Gamma^i_{kj}(\mathbf{x}(t))=\Gamma^i_{kj}(0)+\frac{\partial\Gamma^i_{kj}}{\partial x^l}(0)\,x^l(t)+O(s^2t)$$

(n'oublions pas que $\overline{U}$ est supposé compact). Donc

$$a^i(t)=a^i_0-\int_0^t\left[\Gamma^i_{kj}(0)+\frac{\partial\Gamma^i_{kj}}{\partial x^l}(0)\,x^l(t)+O(s^2t)\right]\times$$

$$\times[a^j_0-\Gamma^j_{qp}(0)\,a^p_0x^q(t)+O(s^2t)]\,\dot{x}^k(t)\,dt=$$

$$=a^i_0-\Gamma^i_{kj}(0)\,a^j_0x^k(t)+\Gamma^i_{kj}(0)\,\Gamma^j_{qp}(0)\,a^p_0\int_0^t x^q(t)\,\dot{x}^k(t)\,dt-$$

$$-\frac{\partial\Gamma^i_{kj}}{\partial x^l}(0)\,a^j_0\int_0^t x^l(t)\,\dot{x}^k(t)\,dt+O(s^3t),$$

i.e.

$$a^i(t)=a^i_0-\Gamma^i_{kj}(0)\,a^j_0x^k(t)+$$

$$+\left[\Gamma^i_{kp}(0)\,\Gamma^p_{lj}(0)-\frac{\partial\Gamma^i_{kj}}{\partial x^l}(0)\right]a^j_0\int_0^t x^l(t)\,\dot{x}^k(t)\,dt+O(s^3t).$$

On n'a pas besoin des approximations suivantes.

Comme $x^k(1)=0$, il en résulte pour $t=1$ avec les notations claires

$$a^i(1)=a^i_0+\left[\Gamma^i_{kp}\Gamma^p_{lj}-\frac{\partial\Gamma^i_{kj}}{\partial x^l}\right]_0 a^j_0\int_0^t x^l(t)\,\dot{x}^k(t)\,dt. \tag{9}$$

Le calcul de l'intégrale du second membre exige qu'on soumette le lacet u à des conditions supplémentaires.

Condition 1. Les fonctions (1) s'écrivent

(10) $$x^k(t) = x^k(\alpha(t),\ \beta(t)),\quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

où les fonctions de deux variables $x^k(\alpha, \beta)$ sont définies dans un voisinage V du point (0, 0) dans le plan $\mathbb{R}^2$ des α, β. Ces fonctions sont telles que la matrice des dérivées partielles

(11) $$\begin{Vmatrix} x^1_\alpha & \dots & x^m_\alpha \\ x^1_\beta & \dots & x^m_\beta \end{Vmatrix}$$

au point (0, 0) soit de rang 2 et que

(12) $$\alpha = \alpha(t),\ \beta = \beta(t),\ 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

définissent un lacet différentiable par morceaux γ dans V.

Cela signifie que le lacet u est sur une surface élémentaire régulière

(13) $$x^k = x^k(\alpha,\ \beta),\qquad (\alpha,\ \beta) \in V.$$

Puisque

(14) $$\dot{x}^k = x^k_\alpha \dot{\alpha} + x^k_\beta \dot{\beta},\qquad k = 1,\ \dots,\ m$$

(on omet les arguments afin de simplifier les formules; x^k_α et x^k_β sont les dérivées partielles), l'intégrale de (9) s'écrit comme intégrale le long de la courbe γ:

(15) $$\int_0^1 x^l \dot{x}^k\, dt = \int_0^1 x^l (x^k_\alpha \dot{\alpha} + x^k_\beta \dot{\beta})\, dt = \oint_\gamma x^l x^k_\alpha\, d\alpha + x^l x^k_\beta\, d\beta.$$

Condition 2. Les fonctions (12) (plus précisément, leurs dérivées) admettent les majorations

$$|\dot{\alpha}(t)| \leqslant \frac{s}{M},\quad |\dot{\beta}(t)| \leqslant \frac{s}{M},\quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

où

(16) $$M = \max_k \max_{(\xi,\,\eta)} (|x^k_\alpha(\alpha,\ \beta)| + |x^k_\beta(\alpha,\ \beta)|),$$
$$(\alpha,\ \beta) \in V,\quad k = 1,\ \dots,\ m.$$

Cette condition garantit l'estimation (5) (voir (14)).

Condition 3. Le lacet u (ou, ce qui revient au même, le lacet γ) est une courbe simple fermée (elle ne se coupe pas).

Il en résulte que γ délimite un domaine G dans le plan des α, β Aussi on applique à l'intégrale de contour (15) la formule de Green, ce qui donne

(17) $$\iint_G \left(\frac{\partial(x^l x^k_\beta)}{\partial\alpha} - \frac{\partial(x^l x^k_\alpha)}{\partial\beta}\right) d\alpha\, d\beta = \iint_G (x^l_\alpha x^k_\beta - x^k_\alpha x^l_\beta)\, d\alpha\, d\beta.$$

D'autre part, la condition 2 entraîne (voir plus haut : on a déduit (6) à partir de (5)) que la courbe γ et, partant, le domaine G sont entièrement dans le carré

$$|\alpha| \leqslant \frac{s}{M}, \quad |\beta| \leqslant \frac{s}{M}.$$

L'aire de ce domaine est donc évaluée par

$$\iint_G d\alpha\, d\beta = cs^2 + O(s^3),$$

et l'intégrale étendue à G par rapport à f quelconque continue sur $\overline{G}$ par

$$\iint_G f\, d\alpha\, d\beta = cf(0,\ 0)\, s^2 + O(s^3), \tag{18}$$

avec c un nombre (fonction de la forme de G).

Condition 4. $c \neq 0$.

Géométriquement, cela équivaut à dire que le domaine G n'est très aplati dans aucune direction.

L'estimation (18) conduit pour l'intégrale (17) à l'égalité

$$\int_0^1 \dot{x}^l x^k\, dt = -s^2 x_0^{kl} + O(s^3),$$

où

$$x_0^{kl} = (x_\alpha^k x_\beta^l - x_\alpha^l x_\beta^k)_0\, c. \tag{19}$$

La substitution dans (9) fournit donc

$$a^i(1) = a_0^i + s^2 \left[\frac{\partial \Gamma_{kj}^i}{\partial x^l} - \Gamma_{kp}^i \Gamma_{lj}^p \right]_0 x_0^{kl} a_0^j + O(s^3).$$

Si l'on échange les indices muets k et l, cette égalité se récrit

$$a^i(1) = a_0^i + s^2 \left[\frac{\partial \Gamma_{lj}^i}{\partial x^k} - \Gamma_{lp}^i \Gamma_{kj}^p \right]_0 x_0^{lk} a_0^j + O(s^3).$$

Comme $x_0^{lk} = -x_0^{kl}$, si l'on fait la somme de deux dernières formules pour ensuite diviser par 2, on a finalement

$$a^i(1) = a_0^i - \frac{1}{2} s^2 (R_{j,\,kl}^i)_0\, x_0^{kl} a_0^j + O(s^3), \tag{20}$$

$(R_{j,\,kl}^i)_0$ étant la valeur en b_0 de la fonction

$$R_{j,\,kl}^i = \frac{\partial \Gamma_{lj}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{kj}^i}{\partial x^l} + \Gamma_{kp}^i \Gamma_{lj}^p - \Gamma_{lp}^i \Gamma_{kj}^p. \tag{21}$$

Regardons cette formule de plus près.

* * *

Les nombres (19) de (20) ne sont autres que les composantes du bivecteur $(c\mathbf{x}_\alpha \wedge \mathbf{x}_\beta)_0$. Ce bivecteur est, à un facteur $c \neq 0$ près, le produit extérieur des vecteurs coordonnées $\mathbf{x}_\alpha$ et $\mathbf{x}_\beta$ de la surface (12) au point (0, 0) et il est donc non nul conformément à la condition imposée au rang de la matrice (11). Pour ne pas le rattacher outre mesure à la surface (12) (qui est en fait choisie au hasard), on va utiliser le symbole $A \wedge B$, ces deux vecteurs quelconques de l'espace $\mathrm{T}_{b_0}\mathscr{B}$ jouissant de la propriété: $A \wedge B = (c\mathbf{x}_\alpha \wedge \mathbf{x}_\beta)_0$. Les composantes x_0^{kl} seront désignées par $(A \wedge B)^{kl}$. Ainsi,

$$(A \wedge B)^{kl} = \begin{vmatrix} A^k & A^l \\ B^k & B^l \end{vmatrix} = A^k B^l - A^l B^k,$$

avec A^k et B^k les coordonnées des vecteurs A et B dans le système considéré de coordonnées locales.

On pose

$$R(A,\ B)^i_j = \frac{1}{2}(R^i_{j,\ kl})_0 (A \wedge B)^{kl}.$$

(On note que cette formule a un sens pour *tout* A et *tout* B de $\mathrm{T}_{b_0}\mathscr{B}$.)

On constate aisément que

$$(22) \qquad R(A,\ B)^i_j = (R^i_{j,\ kl})_0 A^k B^l.$$

Puisque $R^i_{j,\ kl} = -R^i_{j,\ lk}$ et $(A \wedge B)^{kl} = A^k B^l - A^l B^k$, on a effectivement

$$R^i_{j,\ kl}(A \wedge B)^{kl} = R^i_{j,\ kl}A^k B^l - R^i_{j,\ kl}A^l B^k =$$
$$= R^i_{j,\ kl}A^k B^l - R^i_{j,\ lk}A^k B^l = 2R^i_{j,\ kl}A^k B_l$$

(on écrit $R^i_{j,\ kl}$ au lieu de $(R^i_{j,\ kl})_0$ pour alléger les formules; dans la suite, nous nous permettrons maintes fois ce manque de rigueur).

La formule (20) se récrit

$$(23) \qquad a^i(1) = a^i_0 - s^2 R(A,\ B)^i_j a^j_0 + O(s^3).$$

Les nombres $a^i_0 = a^i(0)$ sont par définition les coordonnées d'un vecteur $p_0 \in \mathscr{F}_0$ et $a^i(1)$ représentent les composantes du vecteur $\Pi_u p_0$ obtenu par transport parallèle. Quant aux nombres (22), ils forment la matrice d'un opérateur linéaire $R(A,\ B)$ qui transforme p_0 en $R(A,\ B)\,p_0$ à composantes $R(A,\ B)^i_j a^j_0$. Ainsi, l'égalité (23) s'écrit sous forme vectorielle

$$(23') \qquad \Pi_u p_0 = p_0 - s^2 R(A,\ B)\,p_0 + O(s^3),$$

et sous forme opératorielle

$$(23'') \qquad \Pi_u = \mathrm{id} - s^2 R(A,\ B) + O(s^2).$$

L'opérateur $R(A, B)$ s'appelle *opérateur courbure* associé à $A \wedge B$ de la connexion H.

On suppose donné, pour chaque s, $0 < s < s_0$, un lacet u_s de dimension $\leqslant s$ qui remplit les conditions 1 à 4, dépend différentiablement de s (i.e. les fonctions qui le définissent en coordonnées sont des fonctions différentiables de s) et est tel que le bivecteur $A \wedge B \neq \neq 0$ associé à u_s soit le même pour tout s. La formule (23) entraîne, pour l'opérateur linéaire $R(A, B)$,

$$R(A, B) = -\lim_{s \to 0} \frac{\Pi_{u_s} - \mathrm{id}}{s^2}. \tag{24}$$

Le second membre ne dépend pas du choix des coordonnées $a^1, \ldots$ $\ldots, a^n$ et $x^1, \ldots, x^m$ (dès que les lacets u_s vérifient les conditions 1 à 4 par rapport à un système de coordonnées, ils les vérifient évidemment pour tout autre système), si bien que cela prouve (sous l'hypothèse que pour le bivecteur $A \wedge B$ il existe des lacets u_s) que *l'opérateur courbure*

$$R(A, B): \mathcal{F}_0 \to \mathcal{F}_0 \tag{25}$$

est bien défini (il ne dépend que de la connexion H et du bivecteur $A \wedge B$).

Mais les lacets u_s, $0 < s < s_0$, existent-ils pour tout bivecteur $A \wedge B \neq 0$?

Il se trouve que $A \wedge B$ doit satisfaire à certaines conditions. Lesquelles ?

Soient A et B deux vecteurs linéairement indépendants quelconques de l'espace $\mathrm{T}_{b_0}\mathcal{B}$. On définit les fonctions $x^k(\alpha, \beta)$ par la formule

$$x^k(\alpha, \beta) = \alpha A^k + \beta B^k, \quad k = 1, \ldots, m. \tag{26}$$

Géométriquement, cela signifie que la surface élémentaire (13) est assimilée en coordonnées $x^1, \ldots, x^m$ à la surface de bivecteur directeur $A \wedge B$. Le rôle des vecteurs coordonnées $\mathbf{x}_\alpha$ et $\mathbf{x}_\beta$ est en l'occurrence joué par A et B. Il leur correspond dans le plan des α, β les vecteurs unités $\mathbf{i} = (1, 0)$ et $\mathbf{j} = (0, 1)$ portés par les axes de coordonnées.

Soit, dans le plan considéré, le carré G_s de côtés les vecteurs $s\mathbf{i}$, $s\mathbf{j}$ (son aire est donc s^2), et soit γ_s sa frontière parcourue dans le sens positif (i.e. dans le sens inverse des aiguilles d'une montre). Le lacet u_s de (13) associé au lacet γ_s vérifie évidemment les conditions 1, 3 et 4 (avec $c = 1$). Quant à la condition 2, les fonctions (12) s'écrivent pour γ_s

$$\alpha(t) = s\gamma(t), \quad \beta(t) = s\gamma(1 - t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

où

$$\gamma(t) = \begin{cases} u_t & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1/4, \\ 1 & \text{si } 1/4 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ 3-4t & \text{si } 1/2 \leqslant t \leqslant 3/4, \\ 0 & \text{si } 3/4 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

et elles vérifient donc les inégalités

$$|\dot{\alpha}(t)| \leqslant 4s, \quad |\dot{\beta}(t)| \leqslant 4s.$$

Aussi, la condition 2 est remplie pour $4M \leqslant 1$, où

$$M = \max_k (|A^k| + |B^k|). \tag{27}$$

Ainsi, les lacets construits u_s satisfont aux conditions 1 à 4 et, partant, à l'égalité (24) si l'on a pour A et B l'estimation $M \leqslant 1/4$, M étant le nombre (27). Par conséquent, l'opérateur $R(A, B)$ est bien défini pour ces A, B.

Comme

$$R(\lambda A, B) = R(A, \lambda B) = \lambda R(A, B)$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on voit cependant que $R(A, B)$ *est bien défini pour tout* A *et tout* B de $\mathsf{T}_{b_0}\mathscr{B}$.

Si $A \wedge B = 0$, on a $R(A, B) = 0$ par définition.

* * *

Géométriquement, chaque lacet u_s est le périmètre du parallélogramme construit sur les vecteurs sA, sB. On en déduira en analyse classique que *lorsqu'on effectue le transport parallèle d'un vecteur* $p_0 \in \mathscr{F}_{b_0}$ *le long d'un parallélogramme infinitésimal défini par le bivecteur* $s^2(A \wedge B)$, p_0 *acquiert un accroissement égal (à des infiniment petits d'ordre supérieur près) à* $-s^2R(A, B)\,p_0$.

* * *

Soient X et Y deux champs vectoriels quelconques sur la variété $\mathscr{B}$. On définit l'opérateur linéaire

$$R(X_b, Y_b) : \mathscr{F}_b \to \mathscr{F}_b$$

en chaque point $b \in \mathscr{B}$, donc le vecteur $R(X_b, Y_b)\,s(b) \in \mathscr{F}_b$ pour chaque section $s \in \Gamma\xi$ du fibré ξ.

Aussi,

$$[R(X, Y)\,s](b) = R(X_b, Y_b)\,s(b), \quad b \in \mathscr{B},$$

définit sur $\mathscr{B}$ une section $R(X, Y)s$ du fibré ξ. Dans chaque carte, les coordonnées de $R(X, Y)s$ sont données par la formule

$$[R(X, Y)s]^i = R^i_{j,\,kl}X^kY^ls^j, \tag{28}$$

d'où en particulier la *propriété de différentiabilité de la section* (elle appartient à $\Gamma\xi$). Ainsi, on définit pour *tout* X *et tout* Y *de* $\mathfrak{a}\mathscr{B}$ *l'application*

$$R(X, Y)\colon \Gamma\xi \to \Gamma\xi \tag{29}$$

du $\mathsf{F}\mathscr{B}$*-module* $\Gamma\xi$ *dans lui-même*, et on constate aisément (moyennant (28), par exemple) que *l'application* (29) *est* $\mathsf{F}\mathscr{B}$*-linéaire.*

Par conséquent, la correspondance $(X, Y) \mapsto R(X, Y)$ détermine une application

$$R\colon \mathfrak{a}\mathscr{B} \times \mathfrak{a}\mathscr{B} \to \mathrm{End}_{\mathsf{F}\mathscr{B}}\Gamma\xi \tag{30}$$

du produit direct $\mathfrak{a}\mathscr{B} \times \mathfrak{a}\mathscr{B}$ dans le module $\mathrm{End}_{\mathsf{F}\mathscr{B}}\,\Gamma\xi$ des applications $\mathsf{F}\mathscr{B}$-linéaires $\Gamma\xi \to \Gamma\xi$, qui est évidemment linéaire (voire $\mathsf{F}\mathscr{B}$-linéaire) par rapport à chaque argument.

On note que

$$R(Y, X) = -R(X, Y) \tag{31}$$

pour n'importe quels champs $X, Y \in \mathfrak{a}\mathscr{B}$.

L'application (29) est l'*opérateur courbure* attaché aux champs vectoriels X et Y, et l'application (30) constitue, par suite des identifications

$$\mathrm{End}_{\mathsf{F}\mathscr{B}}\,\Gamma\xi = \mathrm{Hom}_{\mathsf{F}\mathscr{B}}\,(\Gamma\xi, \Gamma\xi) = \mathrm{Mor}\,(\xi, \xi) = \\ = \Gamma\,(\mathrm{Hom}\,(\xi, \xi)) = \Gamma\,(\mathrm{End}\,\xi)$$

(voir formule (19) de la leçon 12), l'application $\mathsf{F}\mathscr{B}$-linéaire

$$R\colon \mathfrak{a}\mathscr{B} \times \mathfrak{a}\mathscr{B} \to \Gamma\,(\mathrm{End}\,\xi). \tag{32}$$

C'est donc (voir problème 21 de la leçon 16 et relation (31)) une forme différentielle de degré 2 (champ tensoriel antisymétrique de type (2, 0)) sur $\mathscr{B}$ à valeurs dans le fibré vectoriel $\mathrm{End}\,\xi$. Cette forme différentielle (champ tensoriel) s'appelle *tenseur de courbure* de la connexion H.

On remarque que les sections du fibré $\mathrm{End}\,\xi = \xi^* \otimes \xi$ sont des champs de ξ-tenseurs de type (1, 1) sur $\mathscr{B}$.

Remarque 1. Il existe une autre définition du tenseur de courbure qui diffère de la nôtre par le signe. Quant aux notations, on en voit de très variées: $R^i{}_{jkl}$, $R_{j,\,kl}{}^i$, $R_{jkl}{}^i$, etc., au lieu de $R^i_{j,\,kl}$ employée dans ce livre.

Problème 1. Pour toute forme R sur $\mathscr{B}$ à valeurs dans $\mathrm{End}\,\xi$ et toute application différentiable $f\colon \mathscr{B}' \to \mathscr{B}$, définir la forme f^*R sur $\mathscr{B}'$ à valeurs dans $\mathrm{End}\,f^*\xi$ et montrer que f^*R est le tenseur de courbure de la connexion f^*H, si R est celui de la connexion H.

* * *

La formule (21) définit les fonctions différentiables $R^i_{j,\,kl}$ sur un voisinage de coordonnées trivialisant U quelconque. Ce sont les *composantes* du tenseur R sur U.

Soient $R^{i'}_{j',\,k'l'}$ les composantes de R sur un voisinage analogue U'. *On a sur l'intersection* $U \cap U'$

$$R^{i'}_{j',\,k'l'} = \varphi^{i'}_i \varphi^j_{j'} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}} R^i_{j,\,kl} \tag{33}$$

(nous utilisons les notations standard introduites dans la leçon 10; voir en particulier la formule (17) de la leçon citée). On démontre (33) par un calcul automatique à l'aide de la formule (17) de la leçon 10. Ce calcul étant fastidieux, on procédera autrement. (Mais les lecteurs feront bien s'ils l'effectuent ne serait-ce que pour se faire la main en calcul tensoriel.)

Pour notre part, nous ferons recours à l'opérateur linéaire (25) qui est bien défini pour tout point $b_0 \in U \cap U'$ et A, $B \in \mathrm{T}_{b_0}\mathscr{B}$ quelconques et qui est représenté dans la base de $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_{b_0}$ associée à la trivialisation donnée sur U par la matrice $\|R(A,\ B)^i_j\| = \|R^i_{j,\,kl}A^kB^l\|$ et dans la base associée à la trivialisation définie sur U' par $\|R(A,\ B)^{i'}_{j'}\| = \|R^{i'}_{j',\,k'l'}A^{k'}B^{l'}\|$. Conformément à la règle générale qui établit la relation entre les matrices d'un même opérateur rapporté aux bases différentes (voir leçon II.14), on a donc

$$R(A,\ B)^{i'}_{j'} = \varphi^{i'}_i \varphi^j_{j'} R(A,\ B)^i_j,$$

i.e.

$$R^{i'}_{j',\,k'l'}A^{k'}B^{l'} = \varphi^{i'}_i \varphi^{j'}_j R^i_{j,\,kl}A^kB^l$$

($R^{i'}_{j',\,k'l'}$, $\varphi^i_{i'}$, $\varphi^{j'}_j$ et $R^i_{j,\,kl}$ sont évidemment les valeurs que ces fonctions prennent au point b_0). Puisque

$$A^k = \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} A^{k'} \quad \text{et} \quad B^l = \frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}} B^{l'},$$

et $A^{k'}$ et $B^{l'}$ sont quelconques, cela prouve la formule (33) (en b et, partant, sur l'intersection $U \cap U'$ tout entière).

Nous n'avons utilisé en fait que la propriété de (28) de définir parfaitement le tenseur (30) à l'aide des fonctions $R^i_{j,\,kl}$, si bien que *la formule* (33) *est juste pour les composantes de tout tenseur de type* (2, 0) *à valeurs dans* End ξ.

Problème 2. Montrer que si les fonctions $R^i_{j,\,kl}$ sont données sur chaque voisinage de coordonnées trivialisant U et que la formule (33) soit valable sur l'intersection $U \cap U'$ de deux voisinages U et U' quelconques, les formules (28) définissent bien un tenseur (30) de type (2, 0) à valeurs dans End ξ.

On identifie donc ces tenseurs aux ensembles de $R^i_{j,\,kl}$ vérifiant (33).

* * *

On peut maintenant introduire le tenseur R en définissant ses composantes par la formule (21) (sans entrer dans le détail), ce qui exige par contre qu'on vérifie sans faute (33) moyennant la formule (17) de la leçon 10. On pourrait néanmoins s'en passer (ou plutôt effectuer cette vérification à un moment plus opportun) à condition d'exprimer l'opérateur $R(X, Y)$ par les opérateurs de dérivation covariante

$$\nabla_X, \ \nabla_Y : \Gamma\xi \to \Gamma\xi$$

associés aux champs de vecteurs X et Y.

Les dérivées ∇_X et ∇_Y s'écrivent en coordonnées (voir formule (10) de la leçon 11)

$$(\nabla_X s) = \left(\frac{\partial s^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kj} s^j\right) X^k,$$

$$(\nabla_Y s)^i = \left(\frac{\partial s^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kj} s^j\right) Y^k.$$

Aussi

$$(\nabla_X \nabla_Y s)^i = \left(\frac{\partial (\nabla_Y s)^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kj} (\nabla_Y s)^j\right) X^k =$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x^k}\left[\left(\frac{\partial s^i}{\partial x^l} + \Gamma^i_{lp} s^p\right) Y^l\right] + \Gamma^i_{kj}\left(\frac{\partial s^j}{\partial x^l} + \Gamma^j_{lp} s^p\right) Y^l\right] X^k =$$

$$= \frac{\partial^2 s^i}{\partial x^k \partial x^l} X^k Y^l + \frac{\partial s^i}{\partial x^l} X^k \frac{\partial Y^l}{\partial x^k} + \frac{\partial \Gamma^i_{lp}}{\partial x^k} s^p X^k Y^l + \Gamma^i_{lp} \frac{\partial s^p}{\partial x^k} X^k Y^l +$$

$$+ \Gamma^i_{lp} s^p X^k \frac{\partial Y^l}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kj} \frac{\partial s^j}{\partial x^l} X^k Y^l + \Gamma^i_{kj} \Gamma^j_{lp} s^p X^k Y^l$$

Si l'on permute les symboles X et Y ou (après le changement d'indices de sommation) les indices k et l, on obtient une expression analogue pour $(\nabla_Y \nabla_X s)^i$. Si l'on fait leur différence, leurs premiers termes se réduisent (vu la symétrie des dérivées partielles mixtes secondes). Comme le quatrième et le sixième terme de chaque formule se déduisent l'un de l'autre par permutation de k et l (on suppose changés les indices de sommation), ces termes se réduisent eux aussi (le quatrième et le sixième ; le sixième et le quatrième). Quant à la différence des troisièmes et des septièmes termes, elle est égale à

$$R^i_{j,\,kl} s^j X^k Y^l = [R(X, Y) s]^i$$

(voir (21)). Les termes restants donnent enfin la somme

$$\frac{\partial s^i}{\partial x^l}\left(X^k \frac{\partial Y^l}{\partial x^k} - Y^k \frac{\partial X^l}{\partial x^k}\right) + \Gamma^i_{lp} s^p \left(X^k \frac{\partial Y^l}{\partial x^k} - Y^k \frac{\partial X^l}{\partial x^k}\right)$$

égale à

$$\left(\frac{\partial s^i}{\partial x^l}+\Gamma^i_{lj}s^j\right)[X,\ Y]^l=(\nabla_{[X,\,Y]}s)^i$$

en vertu de la formule (24) de III.16. Ainsi, $\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X = R(X, Y) + \nabla_{[X,Y]}$ (sur chaque voisinage de coordonnées trivialisant, donc partout), i.e.

(34) $R(X, Y) = \nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]} = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}$.

Il s'agit d'une définition des opérateurs $R(X, Y)$. Simple et concise au souhait, elle est malheureusement formelle et ne révèle pas la signification géométrique des $R(X, Y)$.

Si l'on accepte (34) pour définition, on doit certes vérifier, *primo*, que cette formule définit l'application $\mathsf{F}\mathscr{B}$-linéaire $R(X, Y): \Gamma\xi \to \Gamma\xi$ et, *secundo*, que l'application correspondante (30) est $\mathsf{F}\mathscr{B}$-linéaire à son tour.

Problème 3. Le vérifier.

Le procédé le plus simple et le plus avantageux pour construire le tenseur de courbure consiste à utiliser la dérivation covariante

$$\nabla: \Gamma\xi \to \Gamma(\overset{*}{\tau}_{\mathscr{B}} \otimes \xi)$$

associée à la connexion H (voir leçon 13).

* * *

Soient θ une forme différentielle linéaire sur $\mathscr{B}$ (i.e. un élément du module $\Gamma(\overset{*}{\tau}_{\mathscr{B}}) = \Gamma(\Lambda^1\tau_{\mathscr{B}})$), et ψ une section du fibré $\overset{*}{\tau}_{\mathscr{B}} \otimes \xi$ (i.e. une forme différentielle linéaire sur $\mathscr{B}$ à valeurs dans ξ). Pour chaque point $b \in \mathscr{B}$, l'élément ψ_b de la fibre $\mathbf{T}^*_b\mathscr{B} \otimes \mathscr{F}^\xi_b = \Lambda^1\mathbf{T}_b\mathscr{B} \otimes \mathscr{F}^\xi_b$ du fibré $\overset{*}{\tau}_{\mathscr{B}} \otimes \xi = \Lambda^1\tau_{\mathscr{B}} \otimes \xi$ s'écrit $\sum a_i \otimes p_i$, où $a_i \in \mathbf{T}^*_b\mathscr{B}$, $p_i \in \mathscr{F}^\xi_b$.

Problème 4. Démontrer que la formule

$$(\theta\wedge\psi)_b=\sum_i(\theta_b\wedge a_i)\otimes p_i$$

définit parfaitement l'élément $(\theta \wedge \psi)_b$ de la fibre $\Lambda^2\mathbf{T}_b\mathscr{B} \otimes \mathscr{F}^\xi_b$ de $\Lambda^2\tau_{\mathscr{B}} \otimes \xi$, si bien que

$$b \mapsto (\theta\wedge \psi)_b,\ b \in \mathscr{B},$$

est une section $\theta\wedge\psi$ du fibré $\Lambda^2\tau_{\mathscr{B}} \otimes \xi$.

Si le fibré ξ est trivial au-dessus d'un voisinage $U \subset \mathscr{B}$ et si $s_1, \ldots, s_n$ est la trivialisation correspondante (une base du $\mathsf{F}U$-module $\Gamma(\xi|_U)$), la forme ψ sur U s'écrit de façon unique comme

$\sum \alpha_i \otimes s_i$, avec α_i des formes différentielles linéaires sur U, et la forme $\theta \wedge \psi$ est définie par

$$\theta \wedge \psi = \sum (\theta \wedge \alpha_i) \otimes s_i \text{ sur } U,$$

ce qui prouve en particulier la différentiabilité de $\theta \wedge \psi$ (elle appartient à $\Gamma(\Lambda^2 \tau_{\mathscr{B}} \otimes \xi)$).

Problème 5. Démontrer qu'*il existe une seule application* $\mathbb{R}$*-linéaire*

$$\hat{\nabla}: \Gamma(\tau^*_{\mathscr{B}} \otimes \xi) \to \Gamma(\Lambda^2 \tau_{\mathscr{B}} \otimes \xi)$$

qui vérifie l'identité

$$\hat{\nabla}(\theta \otimes s) = d\theta \otimes s - \theta \wedge \nabla s, \quad \theta \in \Gamma(\tau^*_{\mathscr{B}}), \quad s \in \Gamma(s).$$

Démontrer qu'*elle satisfait également à l'identité de Leibniz*

$$\hat{\nabla}(f\psi) = df \wedge \psi + f\hat{\nabla}\psi, \quad f \in \mathsf{F}\mathscr{B}, \quad \psi \in \Gamma(\tau^*_{\mathscr{B}} \otimes \xi).$$

[*Indication*. L'application $\hat{\nabla}$ est définie sur un voisinage trivialisant $U \subset \mathscr{B}$ quelconque par la formule

$$\hat{\nabla}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \otimes s_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (d\alpha_i \otimes s_i - \alpha_i \wedge \nabla s_i),$$

où $\alpha_i \in \Gamma(\tau^*_{\mathscr{B}}|_U)$ et $s_1, \ldots, s_n$ est une base du $\mathsf{F}U$-module $\Gamma(\xi|_U)$.

Ainsi, on a deux applications

$$\Gamma\xi \xrightarrow{\nabla} \Gamma(\tau^*_{\mathscr{B}} \otimes \xi) \xrightarrow{\hat{\Delta}} \Gamma(\Lambda^2 \tau_{\mathscr{B}} \otimes \xi),$$

et voici l'application composée

$$\hat{\nabla} \circ \nabla: \Gamma\xi \to \Gamma(\Lambda^2 \tau_{\mathscr{B}} \otimes \xi).$$

La dernière application est $\mathsf{F}\mathscr{B}$*-linéaire* (on le constate sans peine) :

$$(\hat{\nabla} \circ \nabla)(fs) = \hat{\nabla}(df \otimes s + f\nabla_s) =$$
$$= ddf \otimes s - df \wedge \nabla s + df \wedge \nabla s - f(\hat{\nabla} \circ \nabla) s =$$
$$= f(\hat{\nabla} \circ \nabla) s. \quad \square$$

Aussi (voir proposition 3 de la leçon 11), il existe un morphisme

(35) $$R: \xi \to \Lambda^2 \tau_{\mathscr{B}} \otimes \xi$$

de fibrés vectoriels (i.e. — voir problème 14 de la leçon 12 — une section du fibré Hom $(\xi, \Lambda^2 \tau_{\mathscr{B}} \otimes \xi)$) tel que

(36) $$\hat{\nabla} \circ \nabla = R \circ.$$

Problème 6. Démontrer qu'*il existe pour trois fibrés vectoriels* ξ, η, ζ *quelconques l'isomorphisme naturel*

$$\mathrm{Hom}\,(\xi,\ \eta\otimes\zeta)=\eta\otimes\mathrm{Hom}\,(\xi,\ \zeta).$$

En particulier,

$$\mathrm{Hom}\,(\xi,\ \Lambda^2\tau_{\mathscr{B}}\otimes\zeta)=\Lambda^2\tau_{\mathscr{B}}\otimes\mathrm{End}\ \xi.$$

Il s'ensuit qu'on peut considérer le morphisme (35) comme forme différentielle de degré 2 sur $\mathscr{B}$ à valeurs dans le fibré End ξ. On l'appelle *forme de courbure* de la connexion H. Faisons une comparaison avec le tenseur de courbure (32).

Soient U un voisinage de coordonnées trivialisant arbitraire et $s_1, \ldots, s_n$ une base du $\mathsf{F}U$-module $\Gamma\,(\xi\,|_U)$. On a pour tout $j = 1, \ldots, n$ les égalités

$$R\circ s_j=\Omega_j^i\otimes s_i,$$

où

$$\Omega_j^i=\sum_{k<l}R_{j,\,kl}^i\,dx^k\wedge dx^l=2R_{j,\,kl}^i\,dx^k\wedge dx^l$$

sont des formes différentielles de degré 2 sur U qui forment la matrice

(37) $$\Omega=\|\,\Omega_j^i\,\|.$$

Les coefficients $R_{j,kl}^i$ ne sont pas pour l'instant liés avec le tenseur (de courbure).

La matrice Ω est la *matrice des formes de courbure* (ou *matrice de courbure* tout court) de la connexion H sur U. (On dit également que c'est la *forme de courbure à valeurs matricielles.*)

Soit $\omega=\|\,\omega_j^i\,\|$ la matrice des formes de connexion H sur U. Par définition,

$$\begin{aligned}\Omega_j^i\otimes s_i&=\hat\nabla(\nabla s_j)=\hat\nabla(\omega_j^i\otimes s_i)=\\&=d\omega_j^i\otimes s_i-\omega_j^i\wedge\nabla s_i=(d\omega_j^i-\omega_j^p\wedge\omega_p^i)\otimes s_i=\\&=(d\omega_j^i+\omega_p^i\wedge\omega_j^p)\otimes s_i,\end{aligned}$$

donc

(38) $$\Omega_j^i=d\omega_j^i+\omega_p^i\wedge\omega_j^p.$$

Cette égalité s'écrit en notations matricielles

(38′) $$\Omega=d\omega+\omega\wedge\omega$$

et en coordonnées:

$$\sum_{k<l} R^i_{j,kl}\, dx^k \wedge dx^l =$$

$$= \sum_{k<l} \left(\frac{\partial \Gamma^i_{lj}}{dx^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{kj}}{dx^l}\right) dx^k \wedge dx^l + \Gamma^i_{kp}\Gamma^p_{lj}\, dx^k \wedge dx^l.$$

La dernière formule entraîne

$$R^i_{j,kl} = \frac{\partial \Gamma^i_{lj}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{kj}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{kp}\Gamma^p_{lj} - \Gamma^i_{lp}\Gamma^p_{kj}$$

(lorsque $k < l$, donc pour k et l quelconques vu que *les coefficients* $R^i_{j,kl}$ sont antisymétriques par rapport à k et l), i.e. $R^i_{j,kl}$ *ne sont autres que les composantes du tenseur de courbure* (ce sont d'ailleurs les notations mêmes qui suggèrent ce résultat).

On voit de plus que les valeurs $\Omega^i_j(A, B)$ des formes Ω^i_j sur les vecteurs $A, B \in \mathbf{T}_b\mathscr{B}$ sont exactement les nombres $R(A, B)^i_j$ figurant dans (22). Cela nous autorise à désigner des fois la matrice $\| R(A, B)^i_j \|$ par $\Omega(A, B)$ (ou par $\Omega_b(A, B)$ s'il faut préciser le point, à savoir b).

La formule (38') est connue sous le nom d'*équation de structure d'Elie Cartan.*

Remarque 2. Dans certains manuels de géométrie différentielle, l'équation de structure s'écrit

$$\Omega = d\omega - \omega \wedge \omega.$$

Le fait est qu'il s'agit dans ces manuels des matrices Ω et ω *transposées* (i.e. l'indice supérieur repère les colonnes et non les lignes). Cette différence n'a certes aucune importance.

Ainsi, on connaît quatre définitions du tenseur de courbure. La première a l'avantage d'être géométrique, mais elle donne lieu à des calculs laborieux. La deuxième (formule (21)) est trop formelle, tandis que la troisième (formule (34)) s'attache outre mesure aux champs vectoriels qu'on a à traîner partout. La quatrième définition (la formule (36) ou, si vous voulez, la formule (38)) s'avère la plus élégante. Si elle demande un certain effort préalable, elle est par contre la plus commode vu qu'elle permet d'utiliser l'appareil efficace et souple des formes différentielles. C'est cette définition que nous emploierons de préférence.

* * *

Les avantages offerts par les formes différentielles sont bien illustrés par la démonstration de la

Proposition 1 (identité de Bianchi). *Sur chaque voisinage* U,

(39) $$d\Omega = \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega.$$

D é m o n s t r a t i o n. Selon (38'), $d\omega = \Omega - \omega \wedge \omega$ et

$$d\Omega = dd\omega + d(\omega \wedge \omega) = d\omega \wedge \omega - \omega \wedge d\omega.$$

Aussi

$$d\Omega = (\Omega - \omega \wedge \omega) \wedge \omega - \omega \wedge (\Omega - \omega \wedge \omega) = \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega. \ \square$$

La relation (39) s'écrit en détaillant

$$d\Omega^i_j = \Omega^i_p \wedge \omega^p_j - \omega^i_p \wedge \Omega^p_j,$$

où

$$\omega^i_j = \Gamma^i_{kj} dx^k, \quad \Omega^i_j = \sum_{k<l} R^i_{j,\,kl} dx^k \wedge dx^l.$$

Aussi

$$d\Omega^i_j = \sum_{k<l<s} \left(\frac{\partial R^i_{j,\,ls}}{\partial x^k} - \frac{\partial R^i_{j,\,ks}}{\partial x^l} + \frac{\partial R^i_{j,\,kl}}{\partial x^s} \right) dx^k \wedge dx^l \wedge dx^s,$$

$$\Omega^i_p \wedge \omega^p_j = \sum_{k<l<s} (R^i_{p,\,kl}\Gamma^p_{js} - R^i_{p,\,ls}\Gamma^p_{jk} + R^i_{p,\,sk}\Gamma^p_{jl})\, dx^k \wedge dx^l \wedge dx^s,$$

$$\omega^i_p \wedge \Omega^p_j = \sum_{k<l<s} (\Gamma^i_{pk} R^p_{j,\,ls} - \Gamma^i_{pl} R^p_{j,\,ks} + \Gamma^i_{ps} R^p_{j,\,kl})\, dx^k \wedge dx^l \wedge dx^s.$$

Il y a intérêt à introduire des notations condensées convenables.

Soit A_{kls} un ensemble de quantités dépendant de trois indices (une matrice spatiale). On pose

(40) $$A_{(kls)} = A_{kls} + A_{lsk} + A_{skl}.$$

On dit que $A_{(kls)}$ est obtenu de A_{kls} *par des cycles.*

On conçoit que $A_{(kls)}$ est invariant par permutation circulaire des indices:

$$A_{(kls)} = A_{(lsk)} = A_{(skl)}.$$

On emploie les notations analogues lorsque A_{kls} dépend de plus d'autres indices. (On encadre, si besoin est, par les traits verticaux les indices conservés par le cycle. L'écriture $A_{(kl|p|q)}$ signifie par exemple que le cycle échange k, l et q et que p est conservé à sa place.)

On note ∂_k la dérivation par rapport à x^k. Si l'on se rappelle que les fonctions $R^i_{j,\,kl}$ sont antisymétriques par rapport à k et l, on constate que les formes $d\Omega^i_j$, $\omega^i_p \wedge \Omega^p_j$ et $\omega^i_p \wedge \Omega^p_j$ ont en tant que coefficients les fonctions

$$\partial_{(k}R^i_{|j|,\, ls)},\quad R^i_{p,\,(k l}\Gamma^p_{|j|s)} = \Gamma^p_{j(k}R_{|p|,\, ls)},\quad \Gamma^i_{p(k}R^p_{|j|,\, ls)},$$
$$k < l < s.$$

Cela signifie que l'identité (39) est équivalente à

(41) $$\partial_{(k}R^i_{|j|,\, ls)} - \Gamma^p_{j(k}R^i_{|p|,\, ls)} + \Gamma^i_{p(k}R^p_{|j|,\, ls)} = 0.$$

Quels que soient l et s fixés, les fonctions $R^i_{j,\, ls}$ sont les composantes d'un ξ-tenseur $\boldsymbol{R}_{ls}$ de type (1, 1) défini sur U. Conformément à la formule générale (13) de la leçon 11, les composantes des dérivées partielles covariantes $\nabla_k \boldsymbol{R}_{ls}$ de ce tenseur sont définies par la formule

$$(\nabla_k \boldsymbol{R}_{ls})^i_j = \partial_k R^i_{j,\, ls} - \Gamma^p_{jk} R^i_{p,\, ls} + \Gamma^i_{pk} R^p_{j,\, ls}.$$

En comparant avec (41), on obtient de suite l'équivalence de (41) et de

(42) $$(\nabla_{(k} \boldsymbol{R}_{ls)})^i_j = 0,$$

i.e. de $\nabla_{(k}\, \boldsymbol{R}_{ls)} = 0$.

C'est l'identité de Bianchi sous forme tensorielle.

LEÇON 20

Tenseur de courbure et groupe d'holonomie. — Algèbre d'holonomie exprimée par le tenseur de courbure. — Connexion plate. — Trivialisations constantes d'une façon covariante. — Connexions à parallélisme absolu. — Passage aux fibrés principaux. — Transport parallèle et groupe d'holonomie pour les fibrés principaux. — Théorème de réduction pour les fibrés principaux. — Forme de courbure d'une connexion sur un fibré principal. — Théorème d'Ambrose-Singer. — Application du théorème d'Ambrose-Singer aux fibrés vectoriels.

Dans cette leçon, nous allons étudier la relation entre le tenseur de courbure R et le groupe d'holonomie restreint Φ_e de la connexion H au point $b_0 \in \mathscr{B}$.

Les développements de la leçon précédente qui ont abouti à la notion de tenseur de courbure, montrent que connaissant R en b_0 (i.e. tous les opérateurs $R(A, B)$, A, $B \in \mathrm{T}_{b_0}\mathscr{B}$), on calcule, à des infiniment petits d'ordre supérieur près, le transport parallèle suivant tout lacet infinitésimal d'origine et d'extrémité b_0. Si l'on connaît donc R sur toute la variété $\mathscr{B}$, on calcule avec la même précision le transport parallèle le long de tout lasso avec un lacet infinitésimal. Or, on sait (voir leçon 18, corollaire 1 du lemme 3) que chaque lacet u homotope à zéro est combinatoirement équivalent au produit de lassos aussi petits qu'on le veut, si bien que le transport parallèle Π_u est le produit de transports parallèles le long de ces lassos. On remplace ceux-là par leurs parties principales, et on obtient pour Π_u un analogue de la somme intégrale (où l'addition est la multiplication des opérateurs linéaires), la limite de la somme étant l'application Π_u. Ainsi, *le tenseur R définit parfaitement le groupe Φ_e*. (On note qu'on ne détermine pas Φ_e avec la valeur de R en b_0 seul.)

Ces considérations sont plutôt décousues, et si l'on veut établir les formules explicites pour les éléments de Φ_e, on devrait construire d'abord la théorie adéquate de l'intégration opératorielle. Cette construction a beau être évidente en principe, elle exige évidemment beaucoup d'efforts (ne serait-ce que du fait de la non-commutativité de la multiplication des opérateurs). Il faut donc prendre un chemin détourné. On pense immédiatement à remplacer le traitement intégral du problème par le traitement différentiel équivalent et à exprimer par le tenseur R l'algèbre de Lie $\mathfrak{f}$ du groupe de Lie Φ_e, qui est une sous-algèbre de l'algèbre de Lie $[\mathrm{End}\, \mathcal{F}_{b_0}]$, et non Φ_e lui-même ($\mathfrak{f}$ s'appelle *algèbre d'holonomie* de la connexion H au point b_0).

* * *

Aussi, on reprend la formule (24) de la leçon 19 et on introduit une courbe $t \mapsto v(t)$ du groupe Φ_e, définie sur le segment $[0, t_0]$, $t_0 = s_0^2$, par

$$v(t) = \begin{cases} \Pi_{u_s} & \text{si } 0 < t \leqslant t_0, \text{ avec } s = \sqrt{t}, \\ \text{id} & \text{si } t = 0. \end{cases} \tag{1}$$

La formule (24) citée entraîne de suite que cette courbe est différentiable au point $t = 0$ et que son vecteur tangent en $t = 0$ est (au signe près) l'opérateur $R(A, B)$.

Ainsi, *tous les opérateurs de la forme* $R(A, B)$, $A, B \in T_{b_0}\mathscr{B}$, *appartiennent à l'algèbre d'holonomie* $\mathfrak{f}$.

Mais $R(A, B)$ (et leurs combinaisons linéaires) n'épuisent pas en général l'algèbre de Lie $\mathfrak{f}$. En effet, on sait qu'un chemin quelconque w entre b_0 et un point $b \in \mathscr{B}$ définit l'isomorphisme du groupe $\Phi_e(b)$ sur le groupe $\Phi_e = \Phi_e(b_0)$, donc de l'algèbre $\mathfrak{f}(b)$ sur l'algèbre $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}(b_0)$. Soit $w^{\#}$ ce dernier isomorphisme. Quels que soient les vecteurs $A, B \in T_b\mathscr{B}$, on définit dans l'algèbre $\mathfrak{f}$ l'élément $w^{\#}R(A, B)$. Ainsi, l'algèbre $\mathfrak{f}$ contient de même tous les opérateurs de la forme $w^{\#}R(A, B)$, $A, B \in T_b\mathscr{B}$, et, partant, toutes leurs combinaisons linéaires.

Proposition 1. *L'algèbre* $\mathfrak{f}$ *est formée de toutes les combinaisons linéaires des éléments de la forme* $w^{\#}R(A, B)$, $A, B \in T_b\mathscr{B}$, $b \in \mathscr{B}$.

Ainsi, si l'on connaît le tenseur R, on calcule l'algèbre de Lie $\mathfrak{f}$, puis on reconstitue par $\mathfrak{f}$ le groupe de Lie Φ_e.

Nous proposons de démontrer l'affirmation énoncée par le procédé suivant.

Chaque élément de $\mathfrak{f}$ est un vecteur tangent en $t = 0$ à une courbe différentiable du groupe Φ_e, qui passe pour $t = 0$ par le point e. On suppose tout naturellement qu'on la détermine sur un segment $[0, t_0]$ par la formule (1), avec u_s la famille de lacets homotopes à zéro qui dépendent différentiablement du paramètre $s = \sqrt{t}$ (telle que $\Pi_{u_0} = \text{id}$). Conformément au corollaire 1 du lemme 3 (leçon 18), chaque élément Π_{u_s} est décomposable en produit $\Pi_{\bar{u}_s^{(1)}} \ldots \Pi_{\bar{u}_s^{(m)}}$, où $\bar{u}_s^{(1)}, \ldots, \bar{u}_s^{(m)}$ sont de petits lassos. On peut évidemment le faire de façon que m soit le même pour tous les s suffisamment petits et que chaque lasso $\bar{u}_s^{(k)}$ s'écrive $w_k u_s^{(k)} w_k^{-1}$, où les chemins w_k ne dépendent pas de s et $u_s^{(k)}$ sont des petits lacets qui dépendent différentiablement de s (et remplissent les conditions 1 à 4 de la leçon 19). Le vecteur tangent en $t = 0$ à la courbe (1) est (voir problème 17 de la leçon 14) la somme de vecteurs tangents aux courbes (1) associées aux lacets $u_s^{(k)}$, i.e. la somme d'éléments de la forme $w_k^{\#}R(A_k, B_k)$, $A_k, B_k \in T_{w_k(1)}\mathscr{B}$. Ainsi, chaque élé-

ment de l'algèbre $\mathfrak{f}$ est bien une combinaison linéaire des éléments de la forme $w^{\tau}R(A, B)$.

Ce raisonnement heuristique paraît assez convaincant, mais on n'en fait une démonstration formelle de la proposition 1 qu'au prix d'efforts techniques pénibles. Aussi, nous allons procéder d'une autre manière.

* * *

La situation se simplifie sensiblement si $R = 0$ (i.e. si $R^i_{j,kl} = 0$ sur chaque voisinage U). Dans ce cas, chaque terme de la somme intégrale en question (on dirait plutôt « du produit intégral ») est, à des infiniment petits d'ordre supérieur près, l'opérateur identique id, si bien que la limite de la somme (resp. du produit) est égale à id quel que soit l'ordre des termes (resp. des facteurs). Ainsi, $\Phi_e = \{e\}$ pour $R = 0$. La réciproque ($R = 0$ pour $\Phi_e = \{e\}$) est évidente, si bien qu'on a l'affirmation suivante (qui n'est certes qu'un cas particulier de la proposition 1).

Proposition 2. *L'égalité $R = 0$ est juste si et seulement si $\Phi_e = \{e\}$*:

$$R = 0 \Leftrightarrow \Phi_e = \{e\}.$$

Une connexion correspondant à $R = 0$ est dite *plate.*

Les considérations « intégrales » ci-dessus deviennent facilement, pour $R = 0$, une démonstration très nette (le faire !), mais nous voulons démontrer la proposition 2 de manière « différentielle » pour s'en servir ensuite dans le cas plus difficile de la proposition 1.

On rappelle qu'un champ de vecteurs X sur l'espace total $\mathscr{E}$ d'un fibré ξ est *horizontal* relativement à la connexion H si $X_p \in H_p$ pour tout point $p \in \mathscr{E}$, i.e. si $X^H = X$ (voir leçon 10). Tous les champs horizontaux forment un sous-espace de l'espace $\mathfrak{a}\mathscr{E}$ des champs de vecteurs sur $\mathscr{E}$. Nous désignons ce sous-espace par $\mathfrak{a}[H]$ (cf. notations introduites dans la leçon 14; on rappelle (voir problème 21 de la leçon 14) que les champs différentiables de sous-espaces et les distributions sont la même chose).

Les champs horizontaux sont caractérisés localement (au-dessus des voisinages de coordonnées trivialisants U) par les égalités

$$\theta^1(X) = 0, \ldots, \theta^n(X) = 0,$$

où (voir leçon 10) θ^i, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont des formes différentielles sur U telles que

$$\theta^i = da^i + \omega^i_j a^j, \quad i = 1, \ldots, n$$

(les formes de connexion ω^i_j sont certes considérées comme formes sur $\mathscr{E}_U = \pi^{-1}U$, i.e. ce sont en fait les formes $\pi^*\omega^i_j$).

Pour $R = 0$ (i.e. pour $\Omega = 0$), les formes ω_j^i vérifient

$$d\omega_j^i = -\omega_p^i \wedge \omega_j^p, \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

donc

$$d\theta^i = dda^i + (d\omega_j^i) a^j - \omega_j^i \wedge da^j =$$
$$= -(\omega_p^i \wedge \omega_j^p) a^j - \omega_j^i \wedge (\theta^j - \omega_p^j a^p) = -\omega_j^i \wedge \theta^j,$$

i.e.

$$d\theta^i = \theta^j \wedge \omega_j^i \quad (\text{pour } R = 0).$$

Ainsi, si $X, Y \in \mathfrak{a}[H]$ (donc $\theta^i(X) = 0$, $\theta^j(Y) = 0$), alors (voir formule (6) de la leçon II.8)

$$d\theta^i(X, Y) = (\theta^j \wedge \omega_j^i)(X, Y) = \theta^j(X)\omega_j^i(Y) - \omega_j^i(X)\theta^j(Y) = 0.$$

D'autre part (voir formule (6) de la leçon III.19),

$$d\theta^i(X, Y) = X\theta^i(Y) - Y\theta^i(X) - \theta^i[X, Y] = -\theta^i[X, Y],$$

si bien que $\theta^i[X, Y] = 0$, i.e. $[X, Y] \in \mathfrak{a}[H]$.

Cela prouve que le sous-espace $\mathfrak{a}[H]$ est pour $R = 0$ une sous-algèbre de l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}\mathscr{E}$. Autrement dit, *chaque connexion plate H est une distribution involutive.*

Par conséquent, la connexion H est complètement intégrable par le théorème de Frobenius (voir leçon 14), i.e. il passe par tout point $p_0 \in \mathscr{E}$ une variété intégrale maximale $\mathscr{X}$ et une seule. Par définition, on a $T_p\mathscr{X} = H_p$ en tout point p de $\mathscr{X}$. Aussi, la restriction $\pi|_{\mathscr{X}}$ de la projection π à $\mathscr{X}$ est-elle étale, et elle constitue donc un difféomorphisme local (voire un revêtement). En particulier, le point $b_0 = \pi(p_0)$ possède dans $\mathscr{B}$ un voisinage U au-dessus duquel le fibré ξ admet une section $s: U \to \mathscr{E}$ telle que $s(b_0) = p_0$ et $s(U) = \mathscr{X} \cap \pi^{-1}U$. (On peut dire que s réalise un relèvement horizontal de *tout* le voisinage U dans $\mathscr{E}$.)

Maintenant, on est en mesure de passer à la

D é m o n s t r a t i o n de la proposition 2. Quel que soit le lacet u au point b_0 entièrement dans le voisinage U, le composé $s \circ u$, avec s la section $U \to \mathscr{E}$ que nous venons de construire, est un lacet en p_0 sur $\mathscr{X}$, donc un lacet horizontal. Comme $(s \circ u)(1) = p_0$, on a pour un tel lacet u: $\Pi_u = \mathrm{id}$.

Aussi, la dernière égalité est également juste pour tout lasso petit et, partant, pour tout lacet u homotope à zéro (voir leçon 18, corollaire 1 du lemme 3). Ainsi, $\Phi_e = \{e\}$. □

* * *

Une autre propriété de s est $\nabla s = 0$ (il suffit de dire que $\nabla_X s = 0$ pour tout champ de vecteurs X sur $\mathscr{B}$). D'autre part, si $p_1, \ldots, p_n$ est une base de l'espace vectoriel $\mathscr{F}_0 = \mathscr{F}_{b_0}$ et si $s_1, \ldots$

..., s_n sont les sections correspondantes (i.e. $s_1(b_0) = p_1, \dots$ ..., $s_n(b_0) = p_n$), alors $s_1, \dots, s_n$ forment évidemment sur un voisinage de b_0 (on note U ce voisinage) une base du $\mathsf{F}U$-module $\Gamma(\xi|_U)$. Inversement, soit U un voisinage de b_0 tel que le $\mathsf{F}U$-module $\Gamma(\xi|_U)$ admette une base $s_1, \dots, s_n$ pour laquelle $\nabla s_1 = 0, \dots, \nabla s_n = 0$. Alors R est évidemment égal à 0 sur U, ce qui prouve la

Proposition 3. *Une connexion H sur un fibré vectoriel $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ est plate si et seulement si la variété $\mathscr{B}$ est recouverte par des ouverts U tels que le $\mathsf{F}U$-module $\Gamma(\xi|_U)$ possède une base $s_1, \dots, s_n$ pour laquelle*

$$\nabla s_1 = 0, \dots, \nabla s_n = 0. \quad \square$$

On appelle $s_1, \dots, s_n$ *trivialisation constante d'une façon covariante* du fibré ξ au-dessus de U.

* * *

Les connexions telles que le groupe d'holonomie complet Φ soit trivial sont dites *à parallélisme absolu.*

Problème 1. Démontrer qu'une connexion est à parallélisme absolu si et seulement si, quels que soient les points $b_0, b_1 \in \mathscr{B}$, l'application $\Pi_u\colon \mathscr{F}_{b_0} \to \mathscr{F}_{b_1}$ est la même pour tous les chemins u joignant b_0 à b_1.

On note que selon le théorème de réduction de la leçon 18, *le domaine d'existence d'une connexion à parallélisme absolu ne peut être que le fibré trivial ξ.*

L'existence de l'épimorphisme (6) de la leçon 18 prouve que si $\mathscr{B}$ est simplement connexe, le groupe Φ coïncide avec le groupe Φ_e. Aussi, la proposition 2 entraîne qu'*une connexion sur un fibré vectoriel au-dessus d'une variété simplement connexe est à parallélisme absolu si et seulement si elle est plate* (et le fibré est trivial).

En particulier, *un fibré sur une variété simplement connexe est trivial s'il admet une connexion plate.*

Ce critère géométrique différentiel de trivialité d'un fibré vectoriel différentiable est d'un emploi étonnamment fréquent.

* * *

Dans le cas général de la proposition 1, la démonstration se complique du fait de l'existence des isomorphismes $w^\#$ qu'on élimine d'ailleurs formellement si l'on choisit dans chaque fibre $\mathscr{F}_b$, $b \in \mathscr{B}$, une base $\mathrm{p} = (p_1, \dots, p_n)$ pour passer ensuite des opérateurs linéaires $\mathscr{F}_b \to \mathscr{F}_b$ à leurs matrices par rapport à cette base.

Soit $\mathfrak{f}_p$ une algèbre de Lie de matrices à éléments dans l'algèbre d'holonomie $\mathfrak{f}_b$, et soit $R_p(A, B)$, $A, B \in T_b\mathscr{B}$, la matrice de l'opérateur de courbure $R(A, B)$ rapporté à la base p.

On a appris dans la leçon 18 que si la base p de l'espace vectoriel $\mathscr{F}_b$ s'obtient de la base p_0 de $\mathscr{F}_0 = \mathscr{F}_{b_0}$ par transport parallèle le long du chemin w joignant b_0 à b, alors l'isomorphisme $\Phi(b) \to \Phi(b_0)$ induit par w envoie chaque élément du groupe $\Phi(b)$ en l'élément représenté par la même matrice du groupe $\Phi(b_0)$. Cela signifie en particulier que *la matrice dans la base* p_0 *de l'élément* $w^{\#}R(A, B)$, $A, B \in T_b\mathscr{B}$, *de l'algèbre de Lie* $\mathfrak{f}_0 = \mathfrak{f}_{p_0}$ *est la matrice* $R_p(A, B)$.

En langage matriciel, la proposition 1 affirme donc que *quelle que soit la base* p_0 *de l'espace vectoriel* $\mathscr{F}_0$, *l'algèbre de Lie de matrices* $\mathfrak{f}_0 = \mathfrak{f}_{p_0}$ *a pour éléments les combinaisons linéaires des matrices* $R_p(A, B)$, *où* p *sont toutes les bases des fibres de* ξ, *qui s'obtiennent de la base* p_0 *par transport parallèle, et* A *et* B *sont des vecteurs quelconques de l'espace* $T_b\mathscr{B}$, $b = \pi(p)$.

Comme les bases p ne sont autres que les points du fibré principal des repères $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ associé au fibré vectoriel ξ (qui est différentiable si ξ l'est ; voir leçon 16), une question se pose : et si une affirmation analogue est juste pour *tout* $\mathscr{G}$-fibré principal ξ? Pour y répondre, on généralise la notion de transport parallèle et de groupe (algèbre) d'holonomie aux fibrés principaux.

* * *

Soient $\mathscr{G}$ un groupe de Lie, $\mathscr{B}$ une variété séparée différentiable, $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ un $\mathscr{G}$-fibré principal différentiable sur $\mathscr{B}$, et H une connexion sur ξ.

Une courbe $v: I \to \mathscr{E}$ est dite *horizontale* si $\dot{v}(t) \in H_{v(t)}$ pour tout $t \in I$. On dit qu'une courbe $v: I \to \mathscr{E}$ est un *relèvement* d'une courbe $u: I \to \mathscr{B}$ si $u = \pi \circ v$. (Cf. définitions analogues pour les fibrés vectoriels dans la leçon 11.)

Proposition 4. *Quels que soient la courbe différentiable* $u: I \to \mathscr{B}$, *le point* $t_0 \in I$ *et le point* $p_0 \in \mathscr{F}_{b_0}$, $b_0 = \pi(p_0)$, *il existe un seul relèvement horizontal* $v: I \to \mathscr{E}$ *de la courbe* u, *tel que* $v(t_0) = p_0$.

La démonstration en sera donnée dans la leçon suivante. On note pour l'instant que si ξ est un fibré des repères d'un fibré vectoriel ξ, cette proposition découle de suite de la proposition 1 de la leçon 11 (qui est son homologue dans le cas des fibrés vectoriels). [En effet, il suffit, pour construire v, d'effectuer le transport parallèle de chaque vecteur de la base p_0 le long de u.]

On appliquera de règle la proposition 4 lorsque u est un chemin (u est défini sur le segment $I = [0, 1]$) et $t_0 = 0$.

Comme dans le cas des fibrés vectoriels, on note $\Pi_u p_0$ le point

$p_1 = v(1)$, et on appelle *transport parallèle* le long de u l'application

$$\Pi_u : \mathcal{F}_{b_0} \to \mathcal{F}_{b_1}, \quad p_0 \mapsto \Pi_u p_0,$$

où $b_1 = u(1)$. Si l'on compose les chemins, les transports associés forment un produit; on a pour $u = u_1 u_2$

(2) $$\Pi_u = \Pi_{u_2} \circ \Pi_{u_1}.$$

(Cf. formule (2) de la leçon 18.)

Problème 2. Déterminer l'application Π_u pour les chemins u différentiables par morceaux et montrer que la formule (2) reste valable. (Cf. leçon 18.)

La connexion H étant un champ équivariant de sous-espaces, le chemin

$$R_a \circ v: t \mapsto v(t)\, a, \quad t \in I,$$

est horizontal pour tout chemin horizontal $v: I \to \mathcal{E}$ et tout élément $a \in \mathcal{G}$. Il s'agit d'un autre relèvement du chemin $u: I \to \mathcal{B}$, dont l'origine est le point $p_0 a$ et l'extrémité se confond avec $p_1 a$. Donc

(3) $$\Pi_u (p_0 a) = (\Pi_u p_0)\, a, \quad a \in \mathcal{G},$$

i.e.

$$\Pi_u \circ R_a = R_a \circ \Pi_u$$

(l'application Π_u commute avec les actions du groupe $\mathcal{G}$ sur les fibres $\mathcal{F}_{b_0}$ et $\mathcal{F}_{b_1}$ respectivement).

Les applications Π_u associées aux lacets u en b_0 constituent le groupe de transformations de la fibre $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_{b_0}$. On dit, et on note $\Phi^\xi(b_0)$, que ce groupe est le *groupe d'holonomie* du fibré principal ξ à connexion H au point $b_0 \in \mathcal{B}$.

On choisit un point p_0 de $\mathcal{F}_0$ et on fait correspondre à un élément $\Pi_u \in \Phi^\xi(b_0)$ quelconque l'élément a_u du groupe $\mathcal{G}$, qui vérifie la relation

$$\Pi_u p_0 = p_0 a_u.$$

Le groupe $\mathcal{G}$ opère librement et transitivement sur $\mathcal{F}_0$, si bien qu'il y a existence et unicité pour a_u.

La formule (3) entraîne pour deux lacets quelconques u_1, u_2, en b_0:

$$(\Pi_{u_1} \circ \Pi_{u_2})\, p_0 = \Pi_{u_1} (p_0 a_{u_2}) = (\Pi_{u_1} p_0)\, a_{u_2} = p_0 a_{u_1} a_{u_2},$$

égalité qui montre que $\Pi_u \mapsto a_u$ est un homomorphisme. Il y a plus. C'est un monomorphisme du moment que $a_u = e$ si et seulement si $\Pi_u = \text{id}$. Son image (notée $\Phi^\xi(p_0)$ ou, en abrégé, $\Phi(p_0)$) s'appelle *groupe d'holonomie au point* p_0.

Problème 3. Démontrer que le groupe $\Phi(\mathfrak{p}_0)$ est formé de $a \in \mathcal{G}$ tels que le point $\mathfrak{p}_0 a$ soit joint au point $\mathfrak{p}_0$ par un chemin horizontal.

Les groupes $\Phi(b_0)$ et $\Phi(\mathfrak{p}_0)$ sont isomorphes par construction, mais le premier est le groupe de transformations de la fibre $\mathcal{F}_0$ (qui commutent avec l'action de $\mathcal{G}$) et le second représente un sous-groupe du groupe structural $\mathcal{G}$ lui-même.

Si $\mathfrak{\xi}$ est le fibré des repères du fibré vectoriel ξ, le groupe $\Phi^{\mathfrak{\xi}}(b_0)$ a pour éléments les transformations de la variété de Stiefel $V(n, \mathcal{F}_0) = \mathcal{F}_0$ des bases de l'espace vectoriel $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_{b_0}$, qui sont induites par les éléments du groupe d'holonomie $\Phi^{\xi}(b_0)$ de ξ. Dans ce sens, les fibrés ξ et $\mathfrak{\xi}$ ont même groupe $\Phi(b_0)$.

Quant à $\Phi^{\mathfrak{\xi}}(\mathfrak{p}_0)$, ce n'est évidemment autre qu'un groupe matriciel formé des matrices de $\Phi^{\xi}(b_0)$ dans la base $\mathfrak{p}_0$.

Problème 4. Démontrer que quel que soit le fibré principal $\mathfrak{\xi}$, le groupe $\Phi^{\mathfrak{\xi}}(\mathfrak{p}_0)$ possède une structure différentiable naturelle par rapport à laquelle il est un sous-groupe du groupe de Lie $\mathcal{G}$ et que si la variété $\mathcal{B}$ vérifie le deuxième axiome de dénombrabilité, il s'agit de la structure différentiable la plus faible. [*Indication*. Voir proposition 1 de la leçon 18.]

Montrer de plus que cette structure transportée dans $\Phi^{\mathfrak{\xi}}(b_0)$ ne dépend pas du choix du point $\mathfrak{p}_0 \in \mathcal{F}_0$ (ce qui définit par là même une structure naturelle de groupe de Lie sur $\Phi^{\mathfrak{\xi}}(b_0)$).

L'algèbre de Lie $T_e\Phi^{\mathfrak{\xi}}(\mathfrak{p}_0)$ du groupe de Lie $\Phi^{\mathfrak{\xi}}(\mathfrak{p}_0)$ sera désignée par $\mathfrak{f}^{\mathfrak{\xi}}_{\mathfrak{p}_0}$ (ou par $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}_0}$). L'algèbre $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}_0}$ est par construction une sous-algèbre de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = T_e\mathcal{G}$.

Si $\mathfrak{\xi}$ est un fibré des repères, $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}_0}$ est précisément l'algèbre de Lie matricielle $\mathfrak{f}_0$ introduite plus haut.

* * *

Le théorème de réduction (théorème 1 de la leçon 18) se transpose lui aussi aux fibrés principaux.

Proposition 5. *Un fibré principal* $\mathfrak{\xi}$ *admettant une connexion à groupe d'holonomie* Φ *est réductible au groupe* Φ.

Démonstration. Le résultat voulu découle de suite du théorème 1 de la leçon 18 si l'on est en présence du $GL(n; \mathbb{R})$-fibré principal des repères $\mathfrak{\xi}$ associé au fibré vectoriel ξ. En effet, la réduction de ξ au sous-groupe $\Phi \subset GL(n; \mathbb{R})$ est évidemment équivalente à celle du fibré principal $\mathfrak{\xi}$. Dans le cas général, on imite en fait la démonstration du théorème cité.

Soit $\Phi = \Phi^{\mathfrak{\xi}}(\mathfrak{p}_0)$.

On construit un atlas trivialisant $\{(U, \varphi)\}$ du fibré $\mathfrak{\xi}$. A cet effet, on regarde U comme un voisinage sphérique quelconque dans $\mathcal{B}$ et on définit la trivialisation $\varphi: U \times \mathcal{G} \to \mathcal{E}_U$ (ou, plus précisé-

ment, la section $s^U: U \to \mathscr{E}$ liée à φ par la relation $\varphi(b, a) = s^U(b)\, a$, $a \in \mathscr{G}$, $b \in U$). On procède comme suit.

On choisit un chemin v^U quelconque qui relie le point $b_0 = \pi(p_0)$ au centre b^U du voisinage U et on désigne par v_b^U, avec $b \in U$ arbitraire, le composé $v^U w_b^U$ du chemin v^U et du chemin radial w_b^U joignant b^U à b dans U. Soit $s^U(b)$ l'extrémité $\Pi_{v_b^U}(p_0)$ du relèvement horizontal d'origine p_0 du chemin v_b^U. Il est clair que $s^U(b) \in \mathscr{F}_b$, i.e. l'application $s^U: U \to \mathscr{E}_U$ est une section du fibré ξ sur U.

Problème 5. Montrer que $s^U: U \to \mathscr{E}_U$ *est différentiable* (appartient à $\Gamma(\xi|_U)$).

Une fois l'atlas $\{(U, \varphi)\}$ construit, on cherche le cocycle de recollement associé.

Soient U_α et U_β des voisinages sphériques dont l'intersection n'est pas vide, et soient φ_α et φ_β les trivialisations correspondantes. L'application de transition

$$\varphi_{\beta\alpha}: U_\alpha \cap U_\beta \to \mathscr{G}$$

est définie par

$$\varphi_{\beta\alpha}(b) = \tau(s^{U_\alpha}(b), s^{U_\beta}(b)), \quad b \in U_1 \cap U_2,$$

τ étant la translation pour le fibré ξ (voir problème 10 de la leçon 16). Or,

$$s^{U_\alpha}(b) = \Pi_{v_b^\alpha} p_0 \quad \text{et} \quad s^{U_\beta}(b) = \Pi_{v_b^\beta} p_0$$

par définition, où $v_b^\alpha = v_b^{U_\alpha}$ et $v_b^\beta = v_b^{U_\beta}$, si bien que

$$\tau(s^{U_\alpha}(b), s^{U_\beta}(b)) = a_w,$$

où a_w est un élément de Φ associé au lacet

$$w = v_b^\alpha (v_b^\beta)^{-1} = v^{U_\alpha} w_b^{U_\alpha} (w_b^{U_\beta})^{-1} (v^{U_\beta})^{-1}.$$

Ainsi, $\varphi_{\beta\alpha}(b) \in \Phi$, et le cocycle de recollement $\{\varphi_{\beta\alpha}\}$ est donc un cocycle sur le groupe Φ. Par conséquent, le fibré ξ est réductible à Φ. □

Si l'on s'en tient aux résultats généraux de la leçon 9 et que η soit une réduction de ξ, l'espace $\mathscr{E}^\eta$ est plongé dans l'espace $\mathscr{E}^\xi$.

Problème 6. On suppose que le $\mathscr{G}$-fibré principal différentiable ξ est réductible à un sous-groupe, sous-groupe de Lie de $\mathscr{G}$. Montrer que η ainsi obtenu est différentiable lui aussi et que son espace total $\mathscr{E}^\eta$ constitue une sous-variété de la variété $\mathscr{E}^\xi$.

En particulier, l'espace $T_p\mathscr{E}^\eta$ est pour tout point $p \in \mathscr{E}^\eta$ un sous-espace de

$$T_p\mathscr{E}^\xi = T_p\mathscr{F}_b^\xi \oplus H_p, \quad b = \pi(p).$$

Problème 7. Montrer que $H_p \subset T_p\mathscr{E}^\eta$ et que

$$T_p\mathscr{E}^\eta = T_p\mathscr{F}_\beta^\eta \oplus H_p.$$

Il s'ensuit que la correspondance $p \mapsto H_p$, $p \in \mathscr{E}^\eta$ définit sur η une connexion H^η dont on dit qu'elle est *induite* par la connexion H.

Problème 8. Montrer que si $H = \operatorname{Ann} \theta$ (voir leçon 17), alors $H^\eta = \operatorname{Ann} \theta^\eta$, avec θ^η la restriction de la forme θ à la sous-variété $\mathscr{E}^\eta$.

Ainsi, le vecteur $A \in T_p\mathscr{E}^\eta$, $p \in \mathscr{E}^\eta$ quelconque, est horizontal relativement à la connexion H^η si et seulement s'il est horizontal (en tant qu'un vecteur de $T_p\mathscr{E}^\xi$) relativement à H.

* * *

Voyons ce qu'il en est, pour les fibrés principaux, du tenseur de courbure R ou, plus précisément, de la forme de courbure matricielle Ω, et mettons l'équation de structure (38′) de la leçon 19 sous une forme mieux maniable en vue des généralisations.

Soit $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ le fibré des repères associé à un fibré vectoriel ξ, et soit $H = \operatorname{Ann} \theta$ la connexion sur ξ associée à la connexion H sur ξ. La lettre θ désigne une forme différentielle linéaire sur $\mathscr{E}$ à valeurs dans $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$, i.e. une matrice θ à éléments formes différentielles ordinaires θ_j^i sur $\mathscr{E}$, qui s'écrit pour chaque voisinage de coordonnées $\mathscr{E}_U$:

$$\theta = C^{-1}\, dC + C^{-1}\omega C,$$

avec ω la matrice $\| \omega_j^i \|$ des formes de connexion H sur U qui est relevée dans $\mathscr{E}_U$ (voir formule (12′) de la leçon 16). Aussi,

$$\omega = C\theta C^{-1} - dCC^{-1}$$

et

$$d\omega = dC \wedge \theta C^{-1} + C\, d\theta C^{-1} - C\theta \wedge dC^{-1} + dC \wedge dC^{-1},$$

$$\omega \wedge \omega = C\theta \wedge \theta C^{-1} - dC \wedge \theta C^{-1} - C\theta C^{-1} \wedge dCC^{-1} + {} + dCC^{-1} \wedge dCC^{-1}.$$

Vu que $dC^{-1} = -C^{-1}\, dCC^{-1}$, il en résulte

$$d\omega + \omega \wedge \omega = C\,(d\theta + \theta \wedge \theta)\, C^{-1},$$

i.e.

$$d\theta + \theta \wedge \theta = C^{-1}\Omega C \quad \text{sur } \mathscr{E}_U. \tag{4}$$

La lettre Ω désigne la forme matricielle de (38') de la leçon 19 qu'on considère comme forme sur $\mathscr{E}_U$ (i.e., si l'on veut être rigoureux, comme forme $\pi^*\Omega$, π étant la projection $\mathscr{E}_U \to U$).

La formule obtenue signifie que la forme

$$\Omega = d\theta + \theta \wedge \theta \tag{5}$$

à valeurs dans $\mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$ (définie, il y a lieu de le souligner, sur $\mathscr{E}$ tout entier) s'écrit $C^{-1}\Omega C$ pour chaque voisinage $\mathscr{E}_U$, ce qui en fait un substitut cent pour cent des formes Ω. A la différence de celles-ci, la forme (5) présente l'avantage d'être définie sur la variété $\mathscr{E}$ tout entière.

La formule (5) comprenant l'opération $\wedge$ définie pour les formes matricielles seules ne saurait être étendue de suite à un fibré principal quelconque. Nous allons donc lui faire subir certaines transformations.

Quelle que soit l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, le module $\mathsf{F}_{\mathfrak{g}}\mathscr{X}$ des fonctions différentiables sur la variété différentiable $\mathscr{X}$ à valeurs dans $\mathfrak{g}$ est évidemment une algèbre de Lie pour l'opération $(f, g) \mapsto [f, g]$ définie par

$$[f, g](p) = [f(p), g(p)], \quad p \in \mathscr{X}.$$

Ainsi, on définit pour n'importe quelles formes différentielles linéaires α et β sur $\mathscr{X}$ à valeurs dans $\mathfrak{g}$ (regardées comme applications linéaires $\mathfrak{a}\mathscr{X} \to \mathsf{F}_{\mathfrak{g}}\mathscr{X}$; voir leçon 16) la forme $[\alpha, \beta]$ de degré 2 sur $\mathscr{X}$ à valeurs dans $\mathfrak{g}$ si l'on pose pour les champs $X, Y \in \mathfrak{a}\mathscr{X}$ quelconques:

$$[\alpha, \beta](X, Y) = [\alpha(X), \beta(Y)] - [\alpha(Y), \beta(X)].$$

Remarque 1. On procède de même pour α et β de degré quelconque. [On remplace partout, dans la définition usuelle de la forme $\alpha \wedge \beta$, la multiplication de nombres par l'opération dans l'algèbre $\mathfrak{g}$.]

Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n; \mathbb{R})$, on identifie les formes α, β et $[\alpha, \beta]$ aux matrices $\| \alpha^i_j \|$, $\| \beta^i_j \|$ et $\| [\alpha, \beta]^i_j \|$ à éléments formes différentielles ordinaires (de degré 1 et 2 respectivement). On a pour les champs $X, Y \in \mathfrak{a}\mathscr{X}$ quelconques

$$\begin{aligned}[\alpha, \beta]^i_j(X, Y) &= \\ &= (\alpha^i_k(X)\beta^k_j(Y) - \beta^i_k(Y)\alpha^k_j(X)) - (\alpha^i_k(Y)\beta^k_j(X) - \beta^i_k(X)\alpha^k_j(Y)) = \\ &= (\alpha^i_k(X)\beta^k_j(Y) - \alpha^i_k(Y)\beta^k_j(X)) + (\beta^i_k(X)\alpha^k_j(Y) - \beta^i_k(Y)\alpha^k_j(X)) = \\ &= (\alpha^i_k \wedge \beta^k_j)(X, Y) + (\beta^i_k \wedge \alpha^k_j)(X, Y).\end{aligned}$$

Donc

$$[\alpha, \beta]^i_j = \alpha^i_k \wedge \beta^k_j + \beta^i_k \wedge \alpha^k_j,$$

i.e. en notations matricielles

$$[\alpha, \beta] = \alpha \wedge \beta + \beta \wedge \alpha.$$

En particulier, on a pour $\alpha = \beta = \theta$

$$[\theta, \theta] = 2\theta \wedge \theta.$$

Par conséquent, on récrit la formule (4):

$$\Omega = d\theta + \frac{1}{2}[\theta, \theta]. \tag{6}$$

Elle a un sens pour toute connexion $H = \operatorname{Ann} \theta$ sur un $\mathcal{G}$-fibré principal ξ arbitraire.

Définition 1. La forme (6) s'appelle *forme de courbure* de la connexion H.

On souligne que quels que soient le point $p \in \mathcal{E}$ et les vecteurs A, $B \in T_p\mathcal{E}$, cette forme a sa valeur $\Omega_p(A, B)$ dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ du groupe de Lie $\mathcal{G}$.

* * *

Fort de ces résultats, on peut énoncer et démontrer une proposition 1 pour les fibrés principaux quelconques.

Théorème 1. *Pour toute connexion H sur un $\mathcal{G}$-fibré principal $\xi = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B})$ et pour tout point $p_0 \in \mathcal{E}$, l'algèbre d'holonomie $\mathfrak{f}_{p_0}$ est formée des combinaisons linéaires de tous les éléments de la forme $\Omega_p(A, B)$, où p est un point quelconque qu'on peut relier à p_0 par un chemin horizontal, et A, $B \in H_p$ sont des vecteurs horizontaux quelconques en p.*

D é m o n s t r a t i o n. Conformément à la proposition 5, le fibré ξ se réduit au fibré η à groupe Φ, et la forme de courbure Ω^η de η est (voir problème 6 et formule (8)) la restriction à $\mathcal{E}^\eta$ de la forme de courbure Ω, si bien que Ω et Ω^η prennent mêmes valeurs sur les vecteurs horizontaux. Aussi, le théorème 1 est vrai pour le fibré ξ dès qu'il l'est pour η. Il suffit donc de le démontrer sous la seule hypothèse que le groupe d'holonomie Φ se confond avec le groupe structural $\mathcal{G}$ tout entier (et l'algèbre $\mathfrak{f}_{p_0}$ coïncide donc avec l'algèbre $\mathfrak{g}$). Quand $\Phi = \mathcal{G}$, on joint tout point $p \in \mathcal{E}$ à p_0 par un chemin horizontal, et il suffit donc de démontrer que l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$ est engendré pour $\Phi = \mathcal{G}$ par les éléments de la forme $\Omega_p(A, B)$, $p \in \mathcal{E}$, A, $B \in H_p$.

D'autre part, $\Omega_p(A, B) = d\theta_p(A, B)$ pour tout A et tout B de H_p parce que $\theta_p(A) = 0$, avec $A \in H_p$ quelconque. Ainsi, il nous faut démontrer que si $\Phi = \mathcal{G}$, l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$ a pour générateurs les éléments de la forme $d\theta_p(A, B)$, $p \in \mathcal{E}$, A, $B \in H_p$,

i.e. $d\theta(\tilde{X}, \tilde{Y})(p)$, où X et Y sont des champs de vecteurs arbitraires sur $\mathscr{B}$ et $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ en sont des relèvements horizontaux (voir leçon 17).

Par suite de la formule générale (34) de la leçon 16,

$$d\theta(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \tilde{X}\theta(\tilde{Y}) - \tilde{Y}\ \theta(\tilde{X}) - \theta([\tilde{X}, \tilde{Y}]),$$

où $\theta(\tilde{X}) = 0$ et $\theta(\tilde{Y}) = 0$ (puisque les champs $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ sont horizontaux) et, partant, $d\theta(\tilde{X}, \tilde{Y})(p) = -\theta([\tilde{X}, \tilde{Y}])(p)$. Il nous faut donc établir qu'avec $\Phi = \mathscr{G}$, l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$ est engendré par les éléments $\theta([\tilde{X}, \tilde{Y}])(p)$, $p \in \mathscr{E}$, X, $Y \in \mathfrak{a}\mathscr{B}$, i.e. que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}$ étant un sous-espace de $\mathfrak{g}$ engendré par tous ces éléments.

La forme θ est équivariante, ce qui entraîne pour tout $a \in \mathscr{G}$

$$(\mathrm{Ad}\, a)(\theta[\tilde{X}, \tilde{Y}](p)) = (\mathrm{Ad}\, a)(\theta_p([\tilde{X}, \tilde{Y}]_p)) =$$

$$= \theta_{pa}((dR_a)_p[\tilde{X}, \tilde{Y}]_p) = \theta_{pa}((R^*_{a^{-1}}[\tilde{X}, \tilde{Y}])_{pa}) =$$

$$= \theta(R^*_{a^{-1}}[\tilde{X}, \tilde{Y}])(pa) = \theta([R^*_{a^{-1}}\tilde{X}, R^*_{a^{-1}}\tilde{Y}])(pa) = \theta[\tilde{X}, \tilde{Y}](pa) \in \mathfrak{h}$$

(voir problème 5 de la leçon 17), d'où $(\mathrm{Ad}\, a) B \in \mathfrak{h}$ quel que soit $B \in \mathfrak{h}$.

Cela signifie dans le cas $a = \exp tA$ (voir problème 16 de la leçon 14) que $e^{t\, \mathrm{ad}\, A} B \in \mathfrak{h}$, donc

$$(\mathrm{ad}\, A) B = \lim_{t \to 0} \frac{e^{t\, \mathrm{ad}\, A} - \mathrm{id}}{t} B \in \mathfrak{h},$$

i.e. $[A, B] \in \mathfrak{h}$ (voir problème 15 de la leçon 14).

C'est vrai pour tout A de $\mathfrak{g}$ et tout B de $\mathfrak{h}$ (donc pour A, $B \in \mathfrak{h}$ quelconques), si bien que $\mathfrak{h}$ *est une sous-algèbre de l'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$.

On désigne par $\mathscr{D}_p$, $p \in \mathscr{E}$ quelconque, le sous-espace de $T_p\mathscr{E}$ dont les éléments sont tous les vecteurs $(\tilde{X} + A^{\#})_p$, où $X \in \mathfrak{a}\mathscr{B}$, $A \in \mathfrak{h}$ (et $A^{\#}$ est le champ fondamental associé à l'élément A; voir leçon 17).

Soient $(U, x^1, \ldots, x^n)$ une carte quelconque de la variété $\mathscr{B}$, et $X_1, \ldots, X_m$ les relèvements horizontaux dans $\mathscr{E}_U$ des champs de base $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m}$ sur U. Soient $r = \dim \mathfrak{h}$, $A_1, \ldots, A_r$ une base arbitraire de l'algèbre $\mathfrak{h}$, et soient $A_1^{\#}, \ldots, A_r^{\#}$ les champs fondamentaux correspondants. Quel que soit le point $p \in \mathscr{E}_U$, les valeurs que les champs

(7) $$X_1, \ldots, X_m, A_1^{\#}, \ldots, A_r^{\#}$$

prennent en p forment une base du sous-espace $\mathscr{D}_p$. Il en résulte de suite (voir problème 4 de la leçon 10) que *le champ de sous-espaces*

1*

$p \mapsto \mathscr{D}_p$ *est différentiable*, i.e. (voir problème 21 de la leçon 14) qu'il correspond à une distribution $\mathscr{D}$ (de fibres $\mathscr{D}_p$) sur $\mathscr{E}$.

On voit de plus que le sous-module $\mathfrak{a}[\mathscr{D}]$ associé à $\mathscr{D}$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}\mathscr{E}$ (formé des champs de vecteurs W sur $\mathscr{E}$ tels que $W_p \in \mathscr{D}_p$ pour tout point $p \in \mathscr{E}$) est engendré localement par les champs (7), i.e. la restriction $W|_U$ à U de tout $W \in \mathfrak{a}[\mathscr{D}]$ est combinaison linéaire des champs (7) (à coefficients dans l'algèbre $\mathsf{F}U$). Aussi $\mathfrak{a}[\mathscr{D}]$ est une sous-algèbre ($\mathscr{D}$ est involutive) si et seulement si le crochet de deux champs (7) quelconques est combinaison linéaire des champs (7).

On sait d'autre part (voir formule (22) de la leçon 16 et proposition 2 de la leçon 17) que

$$[A_i^{\#}, A_j^{\#}] = [A_i, A_j]^{\#}$$

et $[A_i^{\#}, X_k] = 0$ quels que soient i, j et k. Les champs $[A_i^{\#}, A_j^{\#}]$ et $[A_i^{\#}, X_k]$ s'expriment donc linéairement par les champs (7). Quant aux champs $[X_k, X_l]$, $k, l = 1, \ldots, m$, la définition de la forme θ (voir formule (3) de la leçon 17) fait que si $A_{kl} = \theta([X_k, X_l])$, alors $A_{kl}^{\#} = [X_k, X_l]^V$ et, partant, $[X_k, X_l] = A_{kl}^{\#}$. En effet, $[X_k, X_l] = [X_k, X_l]^V$ en vertu du problème 7 de la leçon 17 parce que $\left[\frac{\partial}{\partial X^k}, \frac{\partial}{\partial X^l}\right] = 0$. Comme

$$(d\theta)(X, Y) = X\theta(Y) - Y\theta(X) - \theta([X, Y]) = \theta([X, Y])$$

pour X et Y horizontaux quelconques (si bien que $\theta([X, Y]) = -\Omega(X, Y)$), l'élément A_{kl} de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ appartient à la sous-algèbre $\mathfrak{h}$, et le champ $[X_k, X_l] = A_{kl}^{\#}$ s'exprime lui aussi moyennant les champs (7).

Ainsi, *la distribution $\mathscr{D}$ est involutive*, donc complètement intégrable en vertu du théorème de Frobenius de la leçon 14. Soit $\mathscr{X}$ la sous-variété intégrale maximale de $\mathscr{D}$ qui passe par le point $p_0 \in \mathscr{E}$. Tous les champs horizontaux appartiennent à la sous-algèbre $\mathfrak{a}[\mathscr{D}]$, si bien que chaque chemin horizontal d'origine p_0 est dans $\mathscr{X}$. Comme tout point $p \in \mathscr{E}$ peut être relié à p_0 par un chemin horizontal ($\Phi = \mathscr{G}$ par hypothèse), on a $\mathscr{X} = \mathscr{E}$. En particulier,

$$m + r = \dim \mathscr{D}_{p_0} = \dim \mathscr{X} = \dim \mathscr{E} = m + n,$$

donc $r = n$. Ainsi, $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$. □

Le théorème 1 est connu sous le nom de *théorème d'Ambrose-Singer*, bien que ces mathématiciens n'en aient démontré qu'une variante affaiblie (et que sa démonstration exhaustive soit due à Ozeki).

* * *

La proposition 1 en est une conséquence triviale pour le fibré des repères ξ associé à un fibré vectoriel ξ et la connexion H induite sur ξ par une connexion donnée H sur ξ. En effet, la forme de courbure Ω de H s'écrit dans chaque carte de $\mathscr{E}_U$ selon (4) comme $C^{-1}\Omega C$, Ω étant la forme de courbure de H sur U transportée dans $\mathscr{E}_U$. Cela signifie par définition que tout point $\mathrm{p} \in \mathscr{E}_U$ de coordonnées (C, x), $C \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$, $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^m$, et les vecteurs $A, B \in \mathrm{T_p}\mathscr{E}$ quelconques vérifient la formule

$$\Omega_\mathrm{p}(A, B) = C^{-1}\Omega_b(A', B')\, C,$$

où $b = \pi(\mathrm{p})$ et A', B' sont les images de A et B par l'application

$$(d\pi)_\mathrm{p}\colon\ \mathrm{T_p}\mathscr{E} \to \mathrm{T_p}\mathscr{B}.$$

Par ailleurs, on a dit dans la leçon 19 que $\Omega_b(A', B')$, $A', B' \in \mathrm{T}_b\mathscr{B}$ quelconques, n'est autre que la matrice $\| R(A', B')^i_j \|$ de l'opérateur linéaire $R(A', B')\colon \mathscr{F}_b \to \mathscr{F}_b$ dans la base $\mathrm{s}(b)$ de l'espace vectoriel $\mathscr{F}_b$. Aussi, $\Omega_\mathrm{p}(A, B)$ est la matrice de $R(A', B')$ dans une base reliée à $\mathrm{s}(b)$ par la matrice de passage C. Puisque cette dernière base est par définition (voir leçon 16) précisément la base p, on a

$$\Omega_\mathrm{p}(A, B) = R_\mathrm{p}(A', B'),$$

avec $R_\mathrm{p}(A', B')$ la matrice de $R(A', B')$ dans la base p. Le théorème 1 relatif à la connexion H équivaut donc à la proposition 1 énoncée en termes de matrices. □

Bien que la proposition 4 nécessaire au théorème 1 ne soit démontrée que dans la leçon suivante, la proposition 1 se trouve complètement établie puisque la validité de celle-là est, on l'a déjà indiqué, évidente pour les fibrés des repères.

LEÇON 21

Lemme de l'espace tangent au produit direct et ses corollaires. — Une équation différentielle. — Existence des relèvements horizontaux pour les fibrés principaux. — Une deuxième définition de la forme de courbure. — Identité de Bianchi pour la forme de courbure d'un fibré principal. — Equation de structure d'Elie Cartan. — Formes horizontales équivariantes. — Quaternions imaginaires. — Formes $F_{\lambda, b}$.

La démonstration de la proposition 4 de la leçon 20 sera précédée de plusieurs remarques de caractère général qu'à vrai dire nous avons pu (et dû) faire dans les *Variétés différentiables.*

Soient $\mathscr{X}$ et $\mathscr{Y}$ deux variétés différentiables, et soit $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ leur produit direct. Quel que soit le point $(p_0, q_0) \in \mathscr{X} \times \mathscr{Y}$, les formules

$$i_{q_0}(p) = (p, q_0), \quad j_{p_0}(q) = (p_0, q), \quad p \in \mathscr{X}, \quad q \in \mathscr{Y},$$

définissent les applications différentiables

$$(1) \qquad i_{q_0} : \mathscr{X} \to \mathscr{X} \times \mathscr{Y}, \quad j_{p_0} : \mathscr{Y} \to \mathscr{X} \times \mathscr{Y},$$

liées aux projections

$$\pi_1 : \mathscr{X} \times \mathscr{Y} \to \mathscr{X}, \quad \pi_2 : \mathscr{X} \times \mathscr{Y} \to \mathscr{Y}$$

par les relations

$$\pi_1 \circ i_{q_0} = \mathrm{id}, \quad \pi_2 \circ j_{p_0} = \mathrm{id}.$$

Ces applications sont des injections, des monéomorphismes et des immersions. Leurs images

$$i_{q_0}\mathscr{X} = \{(p, q_0) \in \mathscr{X} \times \mathscr{Y};\ p \in \mathscr{X}\},$$
$$j_{p_0}\mathscr{Y} = \{(p_0, q) \in \mathscr{X} \times \mathscr{Y};\ q \in \mathscr{Y}\}$$

sont des sous-variétés plongées de $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$, difféomorphes à $\mathscr{X}$ et à $\mathscr{Y}$ respectivement. Les différentielles

$$(2) \qquad \begin{aligned} (di_{q_0})_{p_0} &: T_{p_0}\mathscr{X} \to T_{(p_0, q_0)}(\mathscr{X} \times \mathscr{Y}), \\ (dj_{p_0})_{q_0} &: T_{q_0}\mathscr{Y} \to T_{(p_0, q_0)}(\mathscr{X} \times \mathscr{Y}) \end{aligned}$$

des applications (1) sont des monéomorphismes, et on suppose que les espaces vectoriels $T_{p_0}\mathscr{X}$ et $T_{q_0}\mathscr{Y}$ sont plongés par ceux-ci dans $T_{(p_0, q_0)}(\mathscr{X} \times \mathscr{Y})$.

Lemme 1. *L'espace vectoriel* $\mathbf{T}_{(p_0, q_0)}(\mathscr{X} \times \mathscr{Y})$ *est somme directe de* $\mathbf{T}_{p_0}\mathscr{X}$ *et* $\mathbf{T}_{q_0}\mathscr{Y}$:

D é m o n s t r a t i o n. Si $(U, h) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ et $(V, k) = (V, y^1, \ldots, y^m)$ sont des cartes centrées en p_0 et q_0 respectivement des variétés $\mathscr{X}$ et $\mathscr{Y}$, le couple $(U \times V, h \times k)$ est par définition (voir leçon III.15) une carte centrée en (p_0, q_0) de $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$. Les coordonnées locales de la dernière carte sont les fonctions $x^1 \circ \pi_1, \ldots, x^n \circ \pi_1, y^1 \circ \pi_2, \ldots, y^m \circ \pi_2$, que nous allons désigner par $x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^m$ pour alléger les formules. En ces coordonnées, l'application i_{q_0} est donnée par

$$\begin{aligned} x^i &= x^i, \quad i = 1, \ldots, n, \\ y^j &= 0, \quad j = 1, \ldots, m, \end{aligned} \tag{3}$$

et l'application j_{p_0} par

$$\begin{aligned} x^i &= 0, \quad i = 1, \ldots, n, \\ y^j &= y^j, \quad j = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{4}$$

Il correspond à (U, h) une base de $\mathbf{T}_{p_0}\mathscr{X}$ formée des vecteurs $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{p_0}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, à la carte (V, k) une base de $\mathbf{T}_{q_0}\mathscr{Y}$ formée de $\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_{q_0}$, $1 \leqslant j \leqslant m$, et à la carte $(U \times V, h \times k)$ une base de l'espace $\mathbf{T}_{(p_0, q_0)}(\mathscr{X} \times \mathscr{Y})$ dont les composantes sont les vecteurs $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{(p_0, q_0)}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, et $\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_{(p_0, q_0)}$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Ce faisant, les formules (3) et (4) impliquent de suite (voir définition de la différentielle d'une application différentiable dans III.12) que les différentielles (2) des applications (1) opèrent par les formules

$$(\mathrm{d}i_{q_0})_{p_0}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{p_0} = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{(p_0, q_0)}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$(\mathrm{d}j_{p_0})_{q_0}\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_{q_0} = \left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_{(p_0, q_0)}, \quad j = 1, \ldots, m,$$

ce qui prouve évidemment le lemme 1. □

Quels que soient les vecteurs $A \in \mathbf{T}_{p_0}\mathscr{X}$ et $B \in \mathbf{T}_{q_0}\mathscr{Y}$, le vecteur

$$(\mathrm{d}i_{q_0})_{p_0} A + (\mathrm{d}j_{p_0})_{q_0} B$$

sera désigné par (A, B).

Soit $f : \mathscr{X} \times \mathscr{Y} \to \mathfrak{Z}$ une application différentiable de $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ dans une variété $\mathfrak{Z}$, et soit

$$\mathrm{d}f_{(p_0, q_0)} : \mathbf{T}_{(p_0, q_0)}(\mathscr{X} \times \mathscr{Y}) \to \mathbf{T}_{r_0}\mathfrak{Z}, \quad r_0 = f(p_0, q_0),$$

sa différentielle au point (p_0, q_0). On suppose que les applications

$$R_{q_0}:\mathscr{X}\to\mathscr{Z},\quad L_{p_0}:\mathscr{Y}\to\mathscr{Z}$$

sont définies par

$$R_{q_0}p=f(p, q_0),\quad L_{p_0}q=f(p_0, q).$$

(Si l'on considère f comme multiplication, R_{q_0} est la multiplication à droite par q_0 et L_{p_0} est la multiplication à gauche par p_0.)

Corollaire 1. *Tout vecteur $C\in\mathbf{T}_{(p_0, q_0)}(\mathscr{X}\times\mathscr{Y})$ vérifie l'égalité*

(5) $$(\mathrm{d}f)_{(p_0, q_0)}C=(\mathrm{d}R_{q_0})_{p_0}A+(\mathrm{d}L_{p_0})_{q_0}B,$$

où $A\in\mathbf{T}_{p_0}\mathscr{X}$ et $B\in\mathbf{T}_{q_0}\mathscr{Y}$ sont des vecteurs pour lesquels $C=(A, B)$.

D é m o n s t r a t i o n. L'égalité $C=(A, B)$ s'écrit en détaillant

$$C=(\mathrm{d}i_{q_0})_{p_0}A+(\mathrm{d}j_{p_0})_{q_0}B.$$

Aussi

$$\mathrm{d}f_{(p_0, q_0)}C=\mathrm{d}\,(f\circ i_{q_0})_{p_0}A+\mathrm{d}\,(f_{q_0}\circ j_{p_0})_{q_0}B.$$

On note que

$$R_{q_0}=f\circ i_{q_0}\ \text{et}\ L_{p_0}=f\circ j_{p_0},$$

et on a le résultat voulu. □

Soit $\mathscr{S}$ une autre variété différentiable.

Problème 1. Démontrer que

1° quelles que soient les applications différentiables $u:\mathscr{S}\to\mathscr{X}$ et $v:\mathscr{S}\to\mathscr{Y}$, l'application

$$u\times v:\mathscr{S}\to\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$$

donnée par

$$(u\times v)(t)=(u(t), v(t)),\quad t\in\mathscr{S},$$

est différentiable;

2° chaque application différentiable $\mathscr{S}\to\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$ admet une représentation unique $u\times v$;

3° tout vecteur $D\in\mathbf{T}_t\mathscr{S}$ vérifie en chaque point $t\in\mathscr{S}$ l'égalité

(6) $$\mathrm{d}\,(u\times v)_tD=(\mathrm{d}u)_tD+(\mathrm{d}v)_tD.$$

Soit $w:\mathscr{S}\to\mathscr{Z}$ l'application

$$f\circ(u\times v):\mathscr{S}\xrightarrow{u\times v}\mathscr{X}\times\mathscr{Y}\xrightarrow{f}\mathscr{Z}.$$

Corollaire 2. *Tout vecteur $D \in \mathrm{T}_t\mathscr{S}$ vérifie l'égalité*

$$(7) \qquad (\mathrm{d}w)_t D = \mathrm{d}\,(R_{v(t)} \circ u)_t D + \mathrm{d}\,(L_{u(t)} \circ v)_t D. \ \square$$

Dans le cas particulier où $\mathscr{S}$ est le segment I de l'axe $\mathbb{R}$, u, v et w sont donc les courbes $I \to \mathscr{X}$, $I \to \mathscr{Y}$, $I \to \mathscr{Z}$, et D est le vecteur $\left(\frac{t}{\mathrm{d}t}\right)_t$, la formule (7) s'écrit

$$(8) \qquad \dot{w}(t) = (\mathrm{d}R_{v(t)})_{u(t)}\dot{u}(t) + (\mathrm{d}L_{u(t)})_{v(t)}\dot{v}(t).$$

(En effet, $\dot{w}(t) = (\mathrm{d}w)_t \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)_t$ par définition, et les formules analogues ont lieu pour les courbes u et v.)

* * *

On aura besoin du

Lemme 2. *Soit $A : t \mapsto A(t)$, $t \in I$, un chemin différentiable de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathrm{T}_e\mathscr{G}$. Le groupe de Lie $\mathscr{G}$ contient un seul chemin différentiable $a : t \mapsto a(t)$, $t \in I$, d'origine e, tel que*

$$(9) \qquad \dot{a}(t) = (\mathrm{d}R_{a(t)})_e A(t)$$

pour tout $t \in I$.

D é m o n s t r a t i o n. Le chemin A est par définition la restriction d'une courbe différentiable $I \to \mathscr{G}$ définie sur l'intervalle ouvert $I \supset I$. On suppose sans restreindre la généralité que $I = \mathbb{R}$. Ceci étant, on considère la variété différentiable $\mathscr{X} = \mathscr{G} \times \mathbb{R}$. Comme

$$\mathrm{T}_{(a,\,s)}\mathscr{X} = \mathrm{T}_a\mathscr{G} \oplus \mathrm{T}_s\mathbb{R}$$

pour tout point $(a, s) \in \mathscr{X}$, la formule

$$X_{(a,\,s)} = (\mathrm{d}R_a)_e A(s) + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)_s$$

définit parfaitement sur $\mathscr{X}$ un champ vectoriel X. Il est clair que la courbe intégrale de X passant pour $t = 0$ par le point $(e, 0)$ s'écrit $t \mapsto (a(t), t)$, avec $t \mapsto a(t)$ une courbe de $\mathscr{G}$ vérifiant (9) telle que $a(0) = e$. Il suffit donc de démontrer, pour avoir le lemme 2, que la courbe $t \mapsto (a(t), t)$ est définie pour tous les $t \in I$.

Soit $\{\varphi_t\}$ le flux maximal sur $\mathscr{X}$ induit par le champ X (voir leçon III.17). Il existe sur I une fonction continue strictement positive $\delta(s)$ telle que, quel que soit le point (e, s), $s \in \mathbb{R}$, le point $\varphi_t(e, s)$ soit manifestement défini pour tout t, $|t| < \delta(s)$ (et $\varphi_0(e, s) = (e, s)$). Il en découle en vertu de la compacité de I qu'il existe un nombre $\delta_0 > 0$ pour lequel le point $\varphi_t(e, s)$, $|t| < \delta_0$, est défini pour $s \in I$ quelconque.

Soit T_0 la borne supérieure des nombres T tels que le point $\varphi_t(e, 0) = (a(t), t)$ soit défini pour $0 \leqslant t < T$. Le lemme 2 sera établi à condition de montrer que $T_0 \geqslant 1$.

Soit $T_0 < 1$. D'après la définition de la borne supérieure, on trouve pour tout $\varepsilon > 0$ un nombre $t_0 \in I$ tel que $t_0 < T_0 < t_0 + \varepsilon$ et que le point $\varphi_{t_0}(e, 0)$ soit défini. Prenons le point $\varphi_t(e, t_0)$. On a $t_0 \in I$, si bien que ce point est défini pour $|t| < \delta_0$ et s'écrit $(b(t), t + t_0)$, où $\dot{b}(t) = (dR_{b(t)})_e A(t + t_0)$ et $b(0) = e$. Aussi, la courbe $t \mapsto (b(t - t_0)\, a(t_0), t)$ est définie pour $t_0 - \delta_0 < t < t_0 + \delta_0$; elle constitue une courbe intégrale du champ X et a pour origine le point $(a(t_0), t_0) = \varphi_{t_0}(e, 0)$. Cette courbe est donc la restriction à $]t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0[$ de la courbe intégrale $t \mapsto \varphi_t(e, 0)$ (on utilise la propriété de celle-ci d'être maximale). Ainsi, le point $\varphi_t(e, 0)$ est défini pour $0 \leqslant t < t_0 + \delta_0$, ce qui contredit l'hypothèse de $T_0 < 1$ pour $\varepsilon < \delta_0$. □

* * *

On est en mesure de passer à la

D é m o n s t r a t i o n de la proposition 4 de la leçon 20. Soit $w : I \to \mathscr{E}$ un relèvement arbitraire d'origine p_0 du chemin u dans $\mathscr{E}$. (Il existe au moins un relèvement w du moment que le fibré ξ est localement trivial et le segment I est compact.) Tout relèvement v d'origine p_0 de u s'écrit $t \mapsto w(t)\, a(t)$, où $a : t \mapsto a(t)$ est un chemin d'origine e du groupe de Lie $\mathscr{G}$. Il faut montrer qu'on peut prendre a de façon que le chemin v soit horizontal.

Le vecteur tangent $\dot{v}(t)$ au chemin v s'écrit conformément à la formule (8) (où l'on substitue à u, v, w et $\mathscr{X}, \mathscr{Y}, \mathscr{Z}$ les courbes w, a, v et le triplet $\mathscr{E}, \mathscr{G}, \mathscr{E}$ respectivement et où f fait place à l'action $\mathscr{E} \times \mathscr{G} \to \mathscr{E}$):

$$\dot{v}(t) = (dR_{a(t)})_{w(t)} \dot{w}(t) + (dL_{w(t)})_{a(t)} \dot{a}(t).$$

Le dernier terme du second membre est transformé comme suit:

$$(dL_{w(t)})_{a(t)} \dot{a}(t) = [(dL_{w(t)})_{a(t)} \circ (dL_{a(t)})_e]((dL_{a(t)})_e^{-1} \dot{a}(t)) =$$

$$= (dL_{v(t)})_e ((dL_{a(t)})_e^{-1} \dot{a}(t)) = ((dL_{a(t)})_e^{-1} \dot{a}(t))^{\#}_{v(t)}$$

(voir formule (19) de la leçon 16), où $L_{a(t)}$ de la première ligne s'interprète comme translation à gauche dans le groupe $\mathscr{G}$, si bien que le vecteur $(dL_{a(t)})_e^{-1} \dot{a}(t)$ s'assimile à un vecteur de $\mathrm{T}_e\mathscr{G} = \mathfrak{g}$. Aussi, on a pour toute forme fondamentale θ sur $\mathscr{E}$ à valeurs dans $\mathfrak{g}$

$$\theta_{v(t)}((dL_{w(t)})_{a(t)} \dot{a}(t)) = (dL_{a(t)})_e^{-1} \dot{a}(t).$$

D'autre part, si θ est équivariante, alors

$$\theta_{v(t)}((\mathrm{d}R_{a(t)})_{w(t)}\dot{w}(t)) = (\mathrm{Ad}\, a(t)^{-1})\,\theta_{w(t)}(\dot{w}(t)) =$$

$$= (\mathrm{d}L_{a(t)})_e^{-1}\,[(\mathrm{d}R_{a(t)})_e\theta_{w(t)}(\dot{w}(t))].$$

Par conséquent, l'égalité $\theta_{v(t)}(\dot{v}(t)) = 0$ a lieu si et seulement si

$$(\mathrm{d}R_{a(t)})_e\theta_{w(t)}(\dot{w}(t)) + \dot{a}(t) = 0.$$

Cela prouve (pour $H = \mathrm{Ann}\,\theta$) que *le chemin* $v\colon t \mapsto w(t)\,a(t)$ *est horizontal sous la condition nécessaire et suffisante*

$$\dot{a}(t) = -(\mathrm{d}R_{a(t)})_e\theta_{w(t)}(\dot{w}(t)) \quad \textit{pour tout } t \in I. \tag{10}$$

Si l'on note que cette relation devient (9), (pour $A(t) = -\theta_{w(t)}(\dot{w}(t))$ et si l'on utilise le lemme 2, on aboutit au résultat voulu. □

* * *

Lorsque nous avons introduit dans la leçon 20 la forme de courbure Ω de la connexion H sur le fibré principal ξ, notre but a été de déduire à moindre frais du théorème d'Ambrose-Singer la proposition 1 de la même leçon. Mais Ω est susceptible d'une autre définition qui s'avère plus commode à bien d'égards.

On considère la connexion H comme projecteur $H\colon \mathfrak{a}\mathscr{E} \to \mathfrak{a}\mathscr{E}$ (voir leçon 17).

Proposition 1.

$$\Omega = \mathrm{d}\theta \circ (H \times H). \tag{11}$$

D é m o n s t r a t i o n. Cette formule signifie que

$$\Omega(X, Y) = \mathrm{d}\theta(X^H, Y^H)$$

quels que soient les champs de vecteurs X et Y sur $\mathscr{E}$, i.e. que

$$\Omega_{\mathrm{p}}(A, B) = (\mathrm{d}\theta)_{\mathrm{p}}(A^H, B^H) \tag{12}$$

pour tout point $\mathrm{p} \in \mathscr{E}$ et $A, B \in \mathrm{T}_{\mathrm{p}}\mathscr{E}$ quelconques. C'est cette dernière formule que nous allons vérifier.

Comme les deux membres de (12) sont linéaires par rapport à A et B, il suffit de démontrer l'égalité proposée dans l'hypothèse où chacun des vecteurs A et B est soit horizontal, soit vertical.

Cas 1. Les vecteurs A et B sont horizontaux (i.e. $\theta_{\mathrm{p}}(A) = 0$ et $\theta_{\mathrm{p}}(B) = 0$), auquel cas $[\theta, \theta]_{\mathrm{p}}(A, B) = 0$, donc $\Omega_{\mathrm{p}}(A, B) = (\mathrm{d}\theta)_{\mathrm{p}}(A, B)$. On a (12) parce que $A^H = A$ et $B^H = B$.

Cas 2. Les vecteurs A et B sont verticaux (i.e. $A^H = 0$ et $B^H = 0$). Le second membre de (12) est nul et le premier est égal à la

valeur en p de la fonction

$$(13)\qquad \Omega(X, Y) = d\theta(X, Y) + \frac{1}{2}[\theta, \theta](X, Y)$$

à valeurs dans $\mathfrak{g}$, où X et Y sont des champs de vecteurs sur $\mathscr{E}$ tels que $X_p = A$ et $Y_p = B$. Il est d'ailleurs connu (voir problème 13 de la leçon 16) que X et Y peuvent être des champs fondamentaux, i.e. on suppose que $X = C^{\#}$ et $Y = D^{\#}$, avec C et D des éléments (définis de façon unique) de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Puisque $\theta(C^{\#}) = C = \text{const}$ et $\theta(D^{\#}) = D = \text{const}$, on a (voir formules (22) et (34) de la leçon 16) pour $X = C^{\#}$ et $Y = D^{\#}$

$$(d\theta)(X, Y) = X\theta(Y) - Y\theta(X) - \theta[X, Y] = -\theta[X, Y] = -\theta[C^{\#}, D^{\#}] = -\theta[C, D]^{\#} = -[C, D].$$

D'autre part,

$$[\theta, \theta](X, Y) = [\theta(X), \theta(Y)] - [\theta(Y), \theta(X)] = 2[\theta(X), \theta(Y)] = 2[C, D].$$

Aussi, la fonction (13) est identiquement nulle, si bien que sa valeur en p est 0.

Cas 3. L'un de deux vecteurs est horizontal et l'autre vertical. On suppose pour fixer les idées que c'est A qui est vertical (B est donc horizontal). Dans ce cas, $A^H = 0$ avec le second membre de (12). Comme $\theta(B) = 0$, le premier membre est égal à $(d\theta)_p(A, B)$, donc à la valeur en p de la fonction

$$(14)\qquad d\theta(X, Y) = X\theta(Y) - Y\theta(X) - \theta([X, Y]),$$

X étant un champ $C^{\#}$, $C \in \mathfrak{g}$, tel que $C^{\#}_p = A$, et Y un champ horizontal pour lequel $Y_p = B$. Mais $[X, Y] = [C^{\#}, Y]$ est alors horizontal (voir proposition 2 de la leçon 17), si bien que $\theta([X, Y]) = 0$. Vu qu'on a de plus $\theta(Y) = 0$ et $\theta(X) = C = \text{const}$, la fonction (14) est identiquement nulle. Aussi, sa valeur en p est 0.

Cela achève la démonstration de la proposition 1. □

Corollaire 1. *La forme Ω est horizontale.* □

* * *

Soit ω une forme différentielle quelconque de degré r sur la variété $\mathscr{E}$ (à valeurs dans $\mathscr{V}$ en général). La forme

$$D\omega = d\omega \circ (\underbrace{H \times \ldots \times H}_{r+1 \text{ fois}}),$$

i.e.

$$(D\omega)(X_0, X_1, \ldots, X_r) = (\mathrm{d}\omega)(X_0^H, X_1^H, \ldots, X_r^H),$$
$$X_0, X_1, \ldots, X_r \in \mathfrak{a}\mathscr{E},$$

s'appelle *différentielle covariante extérieure* de ω.

Chose à noter: quelle que soit ω, la forme $D\omega$ est horizontale.

La proposition 1 signifie par conséquent que *la forme de courbure Ω est la différentielle covariante extérieure de la forme de connexion* :

(15) $$\Omega = D\theta.$$

Proposition 2 (identité de Bianchi). *La différentielle covariante extérieure de la forme de courbure est nulle*:

(16) $$D\Omega = 0.$$

Démonstration. Comme $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$, on a $D \circ \mathrm{d} = 0$, donc

$$D\Omega = \frac{1}{2} D[\theta, \theta] = \frac{1}{2} \mathrm{d}[\theta, \theta] \circ (H \times H \times H).$$

D'autre part, toute forme ω de degré 2 à valeurs dans $\mathfrak{g}$ et n'importe quels champs de vecteurs X, Y, Z vérifient selon la formule générale (35) de la leçon 16 l'égalité

$$\mathrm{d}\omega(X, Y, Z) = X\omega(Y, Z) + Y\omega(Z, X) + Z\omega(X, Y) -$$
$$- \omega([X, Y], Z) - \omega([Y, Z], X) - \omega([Z, X], Y).$$

Aussi

$$\mathrm{d}\omega \circ (H \times H \times H) = 0$$

si la forme ω sur $\mathscr{E}$ est verticale (est nulle à condition qu'au moins un de ses arguments soit un champ horizontal).

Il nous suffit donc de démontrer que *la forme* $[\theta, \theta]$ *est verticale*. Or, cette propriété découle de suite de la définition: puisque

$$[\theta, \theta](X, Y) = [\theta(X), \theta(Y)] - [\theta(Y), \theta(X)],$$

on a $[\theta, \theta](X, Y) = 0$ si, disons, X est horizontal (et, partant, $\theta(X) = 0$). □

On note que $D \circ D \neq 0$ en général.

Problème 2. Montrer que si ξ est le fibré des repères d'un fibré vectoriel ξ, l'identité (16) est équivalente à l'identité de Bianchi de la leçon 19 (voir proposition 1 et formule (39) de la leçon 19).

* * *

Une forme différentielle ω de degré r sur $\mathscr{E}$ à valeurs dans $\mathfrak{g}$ est dite *équivariante* si

$$R_a^*\omega = (\mathrm{Ad}\, a^{-1})\, \omega$$

pour tout élément a de $\mathcal{G}$, i.e. si l'on a pour n'importe quels vecteurs $A_1, \ldots, A_r \in T_p\mathcal{E}$ en chaque $p \in \mathcal{E}$:

$$\omega_{pa}((dR_a)_p A_1, \ldots, (dR_a)_p A_r) = (\mathrm{Ad}\, a^{-1})\, \omega_p(A_1, \ldots, A_r).$$

Problème 3. Démontrer *l'équivariance de la forme de courbure* Ω. [*Indication.* Utiliser le fait que $R_a^* \circ H = H \circ R_a^*$ sur les champs de vecteurs et que $R_a^* \circ d = d \circ R_a^*$ sur les formes différentielles et démontrer que si ω est une forme équivariante, alors il en est de même des $\omega \circ (H \times \ldots \times H)$ et $d\omega$ (donc de $D\omega$).]

Problème 4. Démontrer que

$$D\omega = d\omega + [\omega, \theta] \tag{17}$$

pour toute forme horizontale équivariante ω sur $\mathcal{E}$. [*Indication.* Commencer par le cas $r = 2$.]

La formule (17) est connue sous le nom d'*équation de structure d'Elie Cartan*. Si $\omega = \theta$, elle devient la formule (6) de la leçon 20, qui est donc une équation de structure elle aussi.

* * *

Puisque Ad est une représentation du groupe structural $\mathcal{G}$ dans l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$, on définit (voir leçon 17) le fibré vectoriel associé $\xi[\mathrm{Ad}]$, si bien qu'on peut parler (voir leçon 16) des formes différentielles de degré $r \geqslant 0$ sur $\mathcal{B}$ à valeurs dans $\xi[\mathrm{Ad}]$.

Chacune de ces formes ω fait correspondre par définition à tout point $b \in \mathcal{B}$ et aux vecteurs $A_1, \ldots, A_r$ quelconques de $T_b\mathcal{B}$ l'élément $\omega_b(A_1, \ldots, A_r)$ de la fibre $\mathcal{F}_b(\xi[\mathrm{Ad}])$ du fibré $\xi[\mathrm{Ad}]$. D'autre part (voir leçon 1), les points de cette fibre sont autant d'orbites $[p, A]$, $p \in \mathcal{F}$, $A \in \mathfrak{g}$, de l'action du groupe $\mathcal{G}$ sur l'espace $\mathcal{E} \times \mathfrak{g}$, définie comme suit:

$$(p, A)\, a = (pa, (\mathrm{Ad}\, a^{-1})\, A), \quad a \in \mathcal{G},$$

et la formule $j_p(A) = [p, A]$, $A \in \mathfrak{g}$, détermine pour tout point $p \in \mathcal{F}$ l'isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$ sur $\mathcal{F}_b(\xi[\mathrm{Ad}])$. Aussi, l'égalité

$$\hat{\omega}_p(A_1, \ldots, A_r) = j_p^{-1}(\omega_b((d\pi)_p A_1, \ldots, (d\pi)_p A_r))$$
$$A_1, \ldots, A_r \in T_p\mathcal{E},$$

définit bien une forme différentielle $\hat{\omega}$ sur $\mathcal{E}$ à valeurs dans $\mathfrak{g}$.

Problème 5. Montrer que

1° la forme $\hat{\omega}$ est différentiable, horizontale et équivariante;

2° $\omega \mapsto \hat{\omega}$ établit un isomorphisme entre le $F\mathcal{B}$-module $\Gamma(\mathrm{Hom}(\Lambda^r \tau_{\mathcal{B}} \otimes \otimes\, \xi[\mathrm{Ad}]))$ de toutes les formes différentielles de degré r sur $\mathcal{B}$ à valeurs dans $\xi[\mathrm{Ad}]$ et le $F\mathcal{B}$-module des formes horizontales équivariantes de degré r sur $\mathcal{E}$.

Ainsi, *les formes horizontales équivariantes sur $\mathscr{E}$ s'identifient naturellement aux formes sur $\mathscr{B}$ à valeurs dans* ξ [Ad].

En particulier, *les connexions sur le fibré principal* $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{B})$ (*ou, plus précisément, leurs formes de connexion*) *sont exactement les formes linéaires sur $\mathscr{B}$ à valeurs dans* ξ [Ad].

Voilà une définition de la connexion de plus!

La forme de courbure Ω de chacune de ces connexions est une forme de degré 2 sur $\mathscr{B}$ à valeurs dans ξ [Ad].

Problème 6. Montrer que si ξ est le fibré des repères d'un fibré vectoriel ξ, le fibré ξ [Ad] est canoniquement isomorphe au fibré End ξ. [*Indication.* Chaque point de l'espace $\mathscr{E}$ (ξ [Ad]) $= \mathscr{E} \underset{\mathrm{Ad}}{\times} \mathfrak{g}$ s'écrit [p, A], avec $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ le repère dans une fibre $\mathscr{F}_b$ de ξ, A un élément de l'algèbre $\mathfrak{gl}$ $(n; \mathbb{R})$, et [p, A] $=$ [p$'$, A'] si et seulement s'il existe une matrice $C \in$ GL $(n; \mathbb{R})$ telle que $\mathbf{p}' = \mathbf{p}C$ et $A' = C^{-1}AC$. Aussi, l'opérateur linéaire $\mathscr{F}_b \to \mathscr{F}_b$ de matrice A dans la base p dépend du seul point [p, A].]

Problème 7. Démontrer que l'isomorphisme du problème 6 associe à la forme de courbure de la connexion H sur ξ la forme de courbure de H correspondante sur ξ.

Ainsi, on n'a obtenu aucun fait nouveau relatif aux connexions sur les fibrés des repères, comme il fallait d'ailleurs s'y attendre.

* * *

Le dernier sujet que nous abordons dans cette leçon est la construction de certaines SU (2)-connexions spéciales sur $\mathbb{R}^4$. Leur rôle et leur intérêt seront éclaircis dans la leçon suivante.

On rappelle (voir problème 5 de la leçon 7) que les quaternions $\xi = a + bj$ s'identifient naturellement aux matrices de la forme

$$A_\xi = \begin{Vmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{Vmatrix}. \tag{18}$$

Puisque les matrices unitaires unimodulaires d'ordre 2 (éléments du groupe SU (2)) sont exactement les matrices (18), où $a\bar{a} + b\bar{b} = 1$, on voit en particulier que cette identification induit celle du groupe SU (2) et du groupe S^3 des quaternions de norme 1 (qui est la sphère unité de l'espace euclidien $\mathbb{H}$):

$$\mathrm{SU}\,(2) = S^3.$$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{S}^3$ du groupe S^3 (espace tangent en 1 à la sphère S^3) s'identifie alors naturellement au supplémentaire orthogonal de 1 dans $\mathbb{H}$, i.e. à l'espace vectoriel $\mathbb{H}'$ de quaternions imaginaires. Les matrices A_ξ associées s'écrivent

$$\begin{Vmatrix} ia & b \\ -\bar{b} & -ia \end{Vmatrix}, \quad a \text{ réel},$$

i.e. ce sont des matrices antihermitiennes de trace nulle. Celles-ci forment l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$ du groupe de Lie SU (2) (voir leçon III.11), et *la correspondance* $\xi \mapsto A_\xi$ *est donc pour* $\xi \in \mathbb{H}'$ *un isomorphisme de l'espace vectoriel* $\mathbb{H}'$ *sur l'algèbre de Lie* $\mathfrak{su}(2)$.

Cela nous autorise à interpréter toutes les formes différentielles à valeurs dans $\mathfrak{su}(2)$ (par exemple, les formes de connexion sur les SU (2)-fibrés principaux) comme formes à valeurs dans $\mathbb{H}'$.

[*Question*. L'isomorphisme $\mathbb{H}' \approx \mathfrak{su}(2)$ permet de transporter le crochet de Lie dans l'espace vectoriel $\mathbb{H}'$. Qu'est-ce que cette opération ?]

* * *

En particulier, les SU (2)-connexions données sur $\mathbb{R}^4$ ne sont autres que les formes différentielles linéaires à valeurs dans $\mathbb{H}'$

$$A(\mathbf{x}) = A_\alpha(\mathbf{x})\,dx^\alpha, \tag{19}$$

où $\mathbf{x} = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ et où α parcourt les valeurs de 0 à 3. Ce faisant, il y a intérêt à identifier $\mathbb{R}^4$ à $\mathbb{H}$, i.e. à considérer l'argument $\mathbf{x}$ de (19) comme quaternion. (Faites attention au changement de notations pour la forme de connexion.)

Soit donnée, par exemple, une forme (19):

$$A(\mathbf{x}) = \operatorname{Im} \frac{\mathbf{x}\,d\bar{\mathbf{x}}}{1+|\mathbf{x}|^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\mathbf{x}\,d\bar{\mathbf{x}} - d\mathbf{x}\,\bar{\mathbf{x}}}{1+|\mathbf{x}|^2}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H}. \tag{20}$$

Les notations employées sont claires encore que conventionnelles. La forme (20) s'écrit en détaillant

$$\begin{aligned}
A(\mathbf{x}) = {} & \frac{x_1 i + x_2 j + x_3 k}{1+|\mathbf{x}|^2}\,dx_0 + \frac{-x_0 i - x_3 j + x_2 k}{1+|\mathbf{x}|^2}\,dx_1 + \\
& + \frac{x_3 i - x_0 j - x_1 k}{1+|\mathbf{x}|^2}\,dx_2 + \frac{-x_2 i + x_1 j - x_0 k}{1+|\mathbf{x}|^2}\,dx_3 = \\
& = \frac{x_1\,dx_0 - x_0\,dx_1 + x_3\,dx_2 - x_2\,dx_3}{1+|\mathbf{x}|^2}\,i + \\
& + \frac{x_2\,dx_0 - x_3\,dx_1 - x_0\,dx_2 + x_1\,dx_3}{1+|\mathbf{x}|^2}\,j + \\
& + \frac{x_3\,dx_0 + x_2\,dx_1 - x_1\,dx_2 - x_0\,dx_3}{1+|\mathbf{x}|^2}\,k.
\end{aligned}$$

Voici une autre formule pour cette forme :

$$A(\mathbf{x}) = \operatorname{Im}\{f(\mathbf{x})\,d\bar{\mathbf{x}}\}, \quad \text{où } f(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{1+|\mathbf{x}|^2}.$$

La forme de courbure de la connexion (20) notée F est définie par

$$F = dA + A \wedge A =$$
$$= \operatorname{Im}\{df(x) \wedge d\bar{x} + f(x)\, d\bar{x} \wedge f(x)\, d\bar{x}\} =$$
$$= \operatorname{Im}\left\{\frac{(1+|x|^2)\,dx - x(d\bar{x}\,x + \bar{x}\,dx)}{(1+|x|^2)^2} \wedge d\bar{x} + \frac{x\,d\bar{x} \wedge x\,d\bar{x}}{(1+|x|^2)^2}\right\} =$$
$$= \operatorname{Im}\frac{dx \wedge d\bar{x}}{(1+|x|^2)^2},$$

i.e. par

$$F = \frac{dx \wedge d\bar{x}}{(1+|x|^2)^2} \tag{21}$$

du moment qu'on a évidemment un quaternion imaginaire sous le signe Im.

Soit, plus généralement, la forme

$$A_{\lambda, b}(x) = \operatorname{Im} \frac{(x-b)\,d\bar{x}}{\lambda^2 + |x-b|^2}, \tag{22}$$

(avec $b \in \mathbb{H}$ et λ un nombre strictement positif quelconque. Elle s'obtient à partir de (20) par la transformation

$$x \mapsto \lambda x + b, \quad b \in \mathbb{H},$$

composée de l'homothétie $x \mapsto \lambda x$ et de la translation $x \mapsto x + b$.

Problème 8. Montrer que la forme de courbure de la connexion (22) s'exprime par

$$F_{\lambda, b} = \frac{\lambda^2\,dx \wedge d\bar{x}}{\lambda^2 + |x-b|^2}. \tag{23}$$

Il se trouve que les formes (22) sont les seules parmi les formes (19) à posséder deux propriétés importantes. La première a trait au comportement de (22) si $|x| \to \infty$.

Nous dirons qu'une fonction (une forme, et ainsi de suite...) *est définie au voisinage de* ∞ s'il existe $R_0 > 0$ tel que cette fonction (forme,...) le soit pour $|x| > R_0$.

On rappelle que deux fonctions numériques f et g définies au voisinage de ∞ *sont asymptotiquement égales pour* $|x| \to \infty$ (ce qui se note $f \sim g$ pour $|x| \to \infty$) si

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to 1 \quad \text{pour } |x| \to \infty.$$

S'agissant de f et g à valeurs dans $\mathbb{H}'$ (ou dans tout autre espace vectoriel $\mathcal{V}$), la formule $f \sim g$, $|x| \to \infty$, signifie par définition l'égalité asymptotique de toutes leurs coordonnées (i.e., en des termes plus invariants, $l \circ f \sim l \circ g$ pour toute fonctionnelle linéaire $l: \mathcal{V} \to \mathbb{R}$). Pareillement, la formule $A \sim B$, $|x| \to \infty$

veut dire par définition pour deux formes différentielles $A = A_\alpha\, dx^\alpha$ et $B = B_\alpha\, dx^\alpha$ définies au voisinage de ∞ que $A_\alpha \sim B_\alpha$ pour tout $\alpha = 0, 1, 2, 3$.

Soit $g\colon \mathbb{H} \to S^3$ une application différentiable définie pour $|\mathbf{x}| > R_0$. Quel que soit $R > R_0$, la composée de l'homothétie $\mathbf{x} \mapsto R\mathbf{x}$ et de la restriction de g à la sphère $|\mathbf{x}| = R$ est une application différentiable $S^3 \to S^3$, et son degré se trouve donc défini (voir leçon III.26). Nous notons k ce degré *de signe contraire* (voir p. 335).

Problème 9. Montrer que le nombre k est indépendant du choix de R.

Voici enfin la première propriété de la forme (22).

Propriété 1. *Il existe une application différentiable* $g\colon \mathbb{H} \to S^3$ *définie au voisinage de* ∞ *pour laquelle*

$$A_{\lambda,\,\mathfrak{b}}(\mathbf{x}) \sim g^{-1}(\mathbf{x})\, dg(\mathbf{x}) \quad \textit{lorsque } |\mathbf{x}| \to \infty \tag{24}$$

quels que soient λ *et* $\mathfrak{b}$. *Le nombre* k *associé est* 1.

D é m o n s t r a t i o n. Il est clair que $A_{\lambda,\,\mathfrak{b}} \sim A$ pour $|\mathbf{x}| \to \infty$, avec $A = A_{1,\,0}$ la forme (20). Il suffit donc de démontrer (24) pour A.

Mais on établit aisément que

$$\frac{\mathbf{x}}{1+|\mathbf{x}|^2} = \bar{\mathbf{x}}^{-1}\frac{|\mathbf{x}|^2}{1+|\mathbf{x}|^2} \sim \bar{\mathbf{x}}^{-1} \quad \text{lorsque } |\mathbf{x}| \to \infty$$

et

$$d|\mathbf{x}| = d\sqrt{\bar{\mathbf{x}}\mathbf{x}} = \frac{d\bar{\mathbf{x}}\,\mathbf{x} + \bar{\mathbf{x}}\,d\mathbf{x}}{2|\mathbf{x}|},$$

$$d\left(\frac{\bar{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|}\right) = \frac{d\bar{\mathbf{x}}\,|\mathbf{x}| - d|\mathbf{x}|\,\bar{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|^2} = \frac{|\mathbf{x}|^2 d\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}\,d\mathbf{x}\,\bar{\mathbf{x}}}{2|\mathbf{x}|^3} = \bar{\mathbf{x}}\frac{\mathbf{x}\,d\bar{\mathbf{x}} - d\mathbf{x}\,\bar{\mathbf{x}}}{2|\mathbf{x}|^3}.$$

Par conséquent,

$$A(\mathbf{x}) \sim \operatorname{Im} \bar{\mathbf{x}}^{-1}\, d\bar{\mathbf{x}} = \operatorname{Im}\frac{\mathbf{x}\,d\bar{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|^2} = \frac{\mathbf{x}\,d\bar{\mathbf{x}} - d\mathbf{x}\,\bar{\mathbf{x}}}{2|\mathbf{x}|^2} = g^{-1}(\mathbf{x})\, dg(\mathbf{x}) \quad \text{pour } |\mathbf{x}| \to \infty,$$

où $g(\mathbf{x}) = \dfrac{\bar{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|}$. Il nous reste à dire que l'application g transforme la sphère S^3 dans elle-même et est la symétrie $\mathbf{x} \mapsto \bar{\mathbf{x}}$ sur S^3. La propriété voulue est vérifiée. □

On passe à la seconde propriété.

Comme l'espace $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$ est muni d'une structure euclidienne standard et d'une orientation, on définit sur lui pour les tenseurs antisymétriques l'opérateur de Hodge $*$. Cet opérateur est défini pour les tenseurs antisymétriques en chaque point de $\mathbb{R}^4$, i.e. pour les formes différentielles sur cet espace, et il opère sur les formes

différentielles basiques de degré 2 par les formules

$$
(25)\quad \begin{aligned}
&*(dx^0 \wedge dx^1) = dx^2 \wedge dx^3, && *(dx^1 \wedge dx^2) = dx^0 \wedge dx^3,\\
&*(dx^0 \wedge dx^2) = -dx^1 \wedge dx^3, && *(dx^1 \wedge dx^3) = -dx^0 \wedge dx^2,\\
&*(dx^0 \wedge dx^3) = dx^1 \wedge dx^2, && *(dx^2 \wedge dx^3) = dx^0 \wedge dx^1.
\end{aligned}
$$

On étend $*$ par linéarité aux formes à valeurs dans un espace vectoriel arbitraire (et, en particulier, aux formes à valeurs dans $\mathbb{H}'$).

On note que $*^2 = 1$.

Une forme différentielle F de degré 2 sur l'espace $\mathbb{R}^4$ est dite *autoduale* si

$$*F = F$$

(elle est *anti-autoduale* pour $*F = -F$).

Propriété 2. *Chaque forme* (23) *est autoduale.*

D é m o n s t r a t i o n. Les formules (25) entraînent que la base de l'espace des formes autoduales est formée par

$$
\begin{aligned}
&dx^0 \wedge dx^1 + dx^2 \wedge dx^3,\\
&dx^0 \wedge dx^2 - dx^1 \wedge dx^3,\\
&dx^0 \wedge dx^3 + dx^1 \wedge dx^2.
\end{aligned}
$$

Puisque

$$
\begin{aligned}
dx \wedge d\bar{x} &=\\
&= (dx^0 + dx^1 i + dx^2 j + dx^3 k) \wedge (dx^0 - dx^1 i - dx^2 j - dx^3 k) =\\
&= -2\,\{(dx^0 \wedge dx^1 + dx^2 \wedge dx^3)\, i +\\
&\quad + (dx^0 \wedge dx^2 - dx^1 \wedge dx^3)\, j + (dx^0 \wedge dx^3 + dx^1 \wedge dx^2)\, k\},
\end{aligned}
$$

cela démontre la propriété 2. □

On a déjà dit que le rôle et l'importance de ces propriétés seront révélés dans la leçon suivante.

LEÇON 22

Equations de Maxwell du champ électromagnétique. — Interprétation opératorielle. — Champs de jauge. — Instantons. — Formule de la charge topologique. — Fonctionnelle de Yang-Mills. — Polynômes invariants sur un espace de matrices. — Classes caractéristiques des fibrés vectoriels.

Les dernières constructions de la leçon précédente paraissent comporter un certain arbitraire, mais elles sont motivées par la théorie moderne des champs physiques.

En physique, le champ électromagnétique est décrit par le vecteur champ électrique **E** et le vecteur champ magnétique **H** qui vérifient dans le vide les équations de Maxwell

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\operatorname{rot}\mathbf{E}, \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \operatorname{rot}\mathbf{H}, \quad \operatorname{div}\mathbf{E} = 0. \tag{2}$$

Dans le formalisme de dimension 4 de la Relativité restreinte, ces vecteurs forment le tenseur antisymétrique F dont les composantes s'écrivent en coordonnées $x^0 = ict$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$:

$$\begin{Vmatrix} 0 & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{10} & 0 & F_{12} & F_{13} \\ F_{20} & F_{21} & 0 & F_{23} \\ F_{30} & F_{31} & F_{32} & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & iE_x & iE_y & iE_z \\ -iE_x & 0 & H_z & -H_y \\ -iE_y & -H_z & 0 & H_x \\ -iE_z & H_y & -H_x & 0 \end{Vmatrix},$$

i.e., autrement dit, la forme différentielle

$$F = \sum_{\alpha<\beta} F_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta = c\,(E_x\, dx + E_y\, dy + E_z\, dz) \wedge dt +$$
$$+ H_z\, dx \wedge dy - H_y\, dx \wedge dz + H_x\, dy \wedge dz$$

dont la différentielle extérieure est

$$dF = \sum_{\alpha<\beta} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}\, dx^\gamma \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta =$$
$$= \left(\frac{\partial F_{12}}{\partial x^3} - \frac{\partial F_{13}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x^1}\right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 +$$
$$+ \left(\frac{\partial F_{02}}{\partial x^3} - \frac{\partial F_{03}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x^0}\right) dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 +$$

$$+\left(\frac{\partial F_{01}}{\partial x^3}-\frac{\partial F_{03}}{\partial x^1}+\frac{\partial F_{13}}{\partial x^0}\right) dx^0\wedge dx^1\wedge dx^3+$$
$$+\left(\frac{\partial F_{01}}{\partial x^2}-\frac{\partial F_{02}}{\partial x^1}+\frac{\partial F_{12}}{\partial x^0}\right) dx^0\wedge dx^1\wedge dx^2=$$
$$=\left(\frac{\partial H_z}{\partial z}+\frac{\partial H_y}{\partial y}+\frac{\partial H_x}{\partial x}\right) dx\wedge dy\wedge dz-$$
$$-c\left(\frac{\partial E_y}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{1}{c}\frac{\partial H_x}{\partial t}\right) dt\wedge dy\wedge dz-$$
$$-c\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}+\frac{1}{c}\frac{\partial H_y}{\partial t}\right) dt\wedge dx\wedge dz-$$
$$-c\left(\frac{\partial E_x}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{1}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t}\right) dt\wedge dx\wedge dy,$$

si bien que deux premières équations de Maxwell (1) équivalent à dF identiquement nulle:

(3) $$dF = 0,$$

i.e. à F fermée.

Si l'on effectue des transformations formelles, il y a intérêt à supposer toutes les variables x^α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 4$ (y compris x^0 !), réelles, i.e. à considérer la forme F sur l'espace $\mathbb{R}^4$ (cela équivaut à introduire le temps imaginaire it; c'est la *rotation de Wick* des physiciens). On fait agir sur F l'opérateur de Hodge $*$, ce qui donne la forme

$$\begin{aligned}*F &= F_{01}\, dx^2\wedge dx^3 - F_{02}\, dx^1\wedge dx^3 + F_{03}\, dx^1\wedge dx^2 +\\ &+ F_{12}\, dx^0\wedge dx^3 - F_{13}\, dx^0\wedge dx^2 + F_{23}\, dx^0\wedge dx^1 =\\ &= -ic\,(H_x\, dx + H_y\, dy + H_z\, dz)\wedge dt +\\ &\qquad + i\,(E_x\, dy\wedge dz - E_y\, dx\wedge dz + E_z\, dx\wedge dy)\end{aligned}$$

(voir formules (25) de la leçon 21). Comme

$$d*F=\left(\frac{\partial F_{01}}{\partial x^1}+\frac{\partial F_{02}}{\partial x^2}+\frac{\partial F_{03}}{\partial x^3}\right) dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3+$$
$$+\left(\frac{\partial F_{01}}{\partial x^0}-\frac{\partial F_{12}}{\partial x^2}-\frac{\partial F_{13}}{\partial x^3}\right) dx^0\wedge dx^2\wedge dx^3+$$
$$+\left(\frac{\partial F_{02}}{\partial x^0}-\frac{\partial F_{12}}{\partial x^1}+\frac{\partial F_{23}}{\partial x^3}\right) dx^0\wedge dx^1\wedge dx^3+$$
$$+\left(\frac{\partial F_{03}}{\partial x^0}+\frac{\partial F_{13}}{\partial x^1}+\frac{\partial F_{23}}{\partial x^2}\right) dx^0\wedge dx^1\wedge dx^2=$$
$$=i\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right) dx\wedge dy\wedge dz+$$
$$+ic\left(\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t}-\frac{\partial H_z}{\partial y}+\frac{\partial H_y}{\partial z}\right) dt\wedge dy\wedge dz+$$

$$+ ic\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t} - \frac{\partial H_z}{\partial x} + \frac{\partial H_x}{\partial z}\right) dt \wedge dx \wedge dz +$$

$$+ ic\left(\frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t} - \frac{\partial H_y}{\partial x} + \frac{\partial H_x}{\partial z}\right) dt \wedge dx \wedge dy,$$

les équations de Maxwell (2) équivalent à

(4) $$d * F = 0.$$

[En présence de charges, l'équation (3) subsiste, et l'équation (4) s'écrit $d * F = *4\pi i\varphi$, où $\varphi = \rho\, dt + j_x\, dx + j_y\, dy + j_z\, dz$ (avec ρ la densité de charge et j_x, j_y, j_z les composantes du vecteur densité de courant).]

Selon un lemme de Poincaré (voir leçon III.20), l'équation (3) entraîne l'existence d'un *potentiel* sur $\mathbb{R}^4$, i.e. l'existence d'une forme linéaire

(5) $$A = A_\alpha(\mathbf{x})\, dx^\alpha, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3,$$

telle que

(6) $$F = dA.$$

Cela signifie, en ce qui concerne les coefficients, qu'on a

(7) $$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}, \quad \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3.$$

Le potentiel A doit vérifier l'équation du second ordre

(8) $$d * dA = 0$$

qu'on obtient en substituant $F = dA$ dans (4). Il est défini à des transformations

(9) $$A \mapsto A + df$$

près (f étant une fonction arbitraire) qu'on appelle *transformations de jauge.*

Si l'on est en dimension 3, le quadrivecteur A se décompose en le *potentiel scalaire* φ et le *potentiel vectoriel* $\mathbf{A}$. On annule par (9) φ et la divergence $\operatorname{div} \mathbf{A}$ (*changement de jauge de Lorentz*). L'équation (8) devient par le changement de jauge de Lorentz l'*équation d'onde de d'Alembert*

$$\frac{1}{c}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \Delta \mathbf{A},$$

et l'égalité (6) s'écrit

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

Les champs $\mathbf{E}$ *et* $\mathbf{H}$ *vérifient donc une même équation de d'Alembert*, ce qui signifie physiquement que dans le vide le champ électromagnétique a la forme d'ondes électromagnétiques.

* * *

Chaque fonction différentiable f définit sur l'espace vectoriel F de toutes les fonctions différentiables sur $\mathbb{R}^4$ l'opérateur linéaire

$$T_f : \psi \mapsto f\psi, \quad \psi \in \mathsf{F}, \tag{10}$$

de la multiplication par f. Cet opérateur est inversible si et seulement si f est partout non nulle.

Nous considérerons également sur F les opérateurs dérivation partielle par rapport aux coordonnées

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \quad \alpha = 0,\ 1,\ 2,\ 3,$$

et les sommes $\partial_\alpha + T_f$. Il serait d'ailleurs bon d'écrire f au lieu de T_f, donc $\partial_\alpha + f$ au lieu de $\partial_\alpha + T_f$.

Cela étant, on fait correspondre à chaque potentiel (5) le quadrivecteur opératoriel ∇ de composantes

$$\nabla_\alpha = \partial_\alpha + A_\alpha, \quad \alpha = 0,\ 1,\ 2,\ 3. \tag{11}$$

Le commutateur de deux opérateurs ∇_α, ∇_β (11) quelconques est donné par la formule

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha.$$

On voit donc que, *primo*, ce commutateur est l'opérateur de la multiplication par une fonction et, *secundo*, cette fonction n'est autre que le coefficient $F_{\alpha\beta}$ de la forme F (voir (7)). Ainsi,

$$F_{\alpha\beta} = [\nabla_\alpha, \nabla_\beta] \tag{12}$$

pour n'importe quels α, $\beta = 0, 1, 2, 3$ (ce n'est certes qu'une autre façon d'écrire (6)).

Pour qu'on puisse interpréter les transformations de jauge (9) en termes d'opérateurs, on considère, pour g une fonction quelconque nulle part égale à 0, l'opérateur composé $\nabla_\alpha \circ T_g$, i.e. l'opérateur

$$\psi \mapsto \nabla_\alpha (g\psi) = (\partial_\alpha + A_\alpha)(g\psi) = (\partial_\alpha g)\psi + \\ + (\partial_\alpha + A_\alpha)\psi = g(\nabla_\alpha + g^{-1}\partial_\alpha g)\psi.$$

On voit que

$$\nabla_\alpha \circ T_g = T_g \circ \nabla'_\alpha,$$

où $\nabla'_\alpha = \nabla_\alpha + g^{-1}\partial_\alpha g$ sont les opérateurs (11) associés au potentiel A' de composantes

$$A'_\alpha = A_\alpha + g^{-1}\partial_\alpha g = A_\alpha + \partial_\alpha \ln g,$$

i.e. au potentiel obtenu de A par une transformation (9), où $f = \ln g$. Ainsi, les transformations de jauge sont exactement les transforma-

tions $A \mapsto A'$ associées à $\nabla_\alpha \mapsto T_g^{-1} \circ \nabla_\alpha \circ T_g$ ou à

$$\nabla_\alpha \mapsto g^{-1} \circ \nabla_\alpha \circ g \tag{13}$$

(transformations par les opérateurs $g = T_g$).

Faisons le bilan. *On considère le potentiel du champ électromagnétique comme quadrivecteur opératoriel de composantes* (11), *le champ F comme forme différentielle sur $\mathbb{R}^4$ à coefficients opératoriels* (12) *et les transformations de jauge comme transformations de la forme* (13). (Cela étant, les fonctions ψ subissant l'action des opérateurs s'interprètent physiquement comme composantes du champ électron-positron de Dirac.)

* * *

Cet énoncé admet une généralisation immédiate. On estime que les fonctions A_α des opérateurs (11) prennent leurs valeurs dans une algèbre de Lie matricielle $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n; \mathbb{K})$, i.e. *on regarde le potentiel* (5) *comme forme différentielle linéaire sur $\mathbb{R}^4$ à valeurs dans $\mathfrak{g}$*. Comme la multiplication de matrices est non commutative, les commutateurs (12) s'écrivent

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha + [A_\alpha, A_\beta].$$

Autrement dit,

$$F = \sum_{\alpha<\beta} F_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta, \quad \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3,$$

est une forme différentielle de degré 2 à valeurs dans $\mathfrak{g}$ qui s'exprime moyennant A par la formule

$$F = dA + A \wedge A. \tag{14}$$

Le champ physique décrit par une forme (14) s'appelle *champ de jauge dérivant du potentiel A*. Ainsi, le champ électromagnétique n'est autre qu'un champ de jauge dérivant d'un potentiel à valeurs dans $\mathfrak{gl}(1; \mathbb{R})$. (Nombreux sont d'ailleurs les cas où il y a avantage à rester dans le cadre des algèbres de Lie des groupes compacts, si bien qu'on doit multiplier tous les résultats par l'unité imaginaire $i = \sqrt{-1}$ et supposer que le potentiel du champ électromagnétique prend ses valeurs dans l'algèbre de Lie $i\mathbb{R} = \mathfrak{u}(1)$ du groupe unitaire $U(1)$.)

Quant aux transformations de jauge, on les *définit* pour les potentiels matriciels comme transformations $A \mapsto A'$ associées à (13), où g est une fonction arbitraire sur $\mathbb{R}^4$ à valeurs dans le groupe de Lie de matrices $\mathcal{G}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

Les coefficients des formes A et F étant des matrices d'ordre n opèrent sur les champs de vecteurs ψ de dimension n sur $\mathbb{R}^4$. Comme tout champ ψ et toute fonction matricielle g à valeurs dans $\mathcal{G}$ véri-

fient les identités

$$(\partial_\alpha \circ g)\,\psi = \partial_\alpha (g\psi) = (\partial_\alpha g)\,\psi + g\,(\partial_\alpha \psi), \quad \alpha = 0,\ 1,\ 2,\ 3,$$

avec $\partial_\alpha g$, $g = \| g^i_j \|$, la matrice $\| \partial_\alpha g^i_j \|$, on a

$$(g^{-1}\nabla_\alpha g)\,\psi = (g^{-1}\,\partial_\alpha g)\,\psi + \partial_\alpha \psi + (g^{-1} A_\alpha g)\,\psi =$$
$$= (\partial_\alpha + g^{-1} A_\alpha g + g^{-1}\,\partial_\alpha g)\,\psi$$

(comme plus haut, on omet $\circ$).

Cela signifie que les transformations de jauge s'écrivent

$$A \mapsto g^{-1} A g + g^{-1}\,\mathrm{d}g \tag{15}$$

dans le cas des potentiels matriciels. La forme F devient par chaque transformation (15):

$$\mathrm{d}\,(g^{-1}Ag + g^{-1}\,\mathrm{d}g) + (g^{-1}Ag + g^{-1}\,\mathrm{d}g) \wedge (g^{-1}Ag + g^{-1}\,\mathrm{d}g) =$$
$$= \mathrm{d}g^{-1} \wedge Ag + g^{-1}\,\mathrm{d}Ag - g^{-1}A \wedge \mathrm{d}g + \mathrm{d}g^{-1} \wedge \mathrm{d}g +$$
$$+ g^{-1}A \wedge Ag + g^{-1}A \wedge \mathrm{d}g + g^{-1}\,\mathrm{d}g \wedge g^{-1}Ag +$$
$$+ g^{-1}\,\mathrm{d}g \wedge g^{-1}\,\mathrm{d}g = g^{-1}\,(\mathrm{d}A + A \wedge A)\,g = g^{-1}Fg$$

(on rappelle que $\mathrm{d}g^{-1} = -g^{-1}\,\mathrm{d}g\,g^{-1}$). La transformation $F \to g^{-1}Fg$ est dite de jauge elle aussi.

Si l'on compare (14) avec l'équation de structure d'Elie Cartan (formule (38′) de la leçon 19), on établit de suite que *tout champ de jauge n'est autre que la forme (tenseur) de courbure d'une connexion et que son potentiel en est la forme* ! Quant aux transformations de jauge (14), ce sont exactement les transformations des formes de connexion dans diverses trivialisations (voir formule (17″) de la leçon 10).

Que viennent faire ici les connexions? En voici une explication.

Chaque champ de jauge F est en principe lié à un *champ matériel* ψ. S'agissant du champ électromagnétique, c'est le champ bispinoriel de Dirac formé d'électrons et de positrons. Dans le cas général, on se donne, pour construire un champ matériel, un groupe de Lie matriciel $\mathcal{G}$ appelé *groupe de symétries intérieures*. (Le groupe $\mathcal{G}$ du champ électron-positron de Dirac est U (1), groupe des transformations de phase $\psi \mapsto e^{i\varepsilon}\psi$.) Les particules du champ sont supposées posséder une structure interne qui subit l'action de $\mathcal{G}$. Cette structure est décrite pour le champ nucléonique (formé de protons et de neutrons) par le spin isotopique, et le groupe $\mathcal{G}$ est ici SU (2) (*groupe de symétrie isotopique*). Elle est définie par un triplet de couleurs dans le cas du champ de quarks où le rôle de $\mathcal{G}$ revient à SU (3) (*groupe de symétrie chromatique*), et ainsi de suite. Lorsqu'une particule se meut dans l'espace de Minkowski suivant deux lignes d'univers distinctes d'origine x et d'extrémité y, ses états internes finaux ne sont pas les mêmes en général. Physiquement, on l'attribue à l'action du champ de jauge correspondant, et, géométriquement, la cause en est la transformation du groupe d'holonomie $\mathcal{G}$ que subit le vecteur d'état.

L'équation de Maxwell (3) (on rappelle qu'elle est vérifiée identiquement par suite de (6)) a pour analogue l'équation de Bianchi

$$dF = F \wedge A - A \wedge F \quad (\text{ou } DF = 0)$$

(qui présente la même propriété en vertu de (14)), et l'analogue de (4) est

(16) $$D * F = 0$$

dite *équation de Yang-Mills.* (Ainsi, les champs de jauge ne sont pas des connexions quelconques sur $\mathbb{R}^4$, mais celles qui vérifient (16).)

Si $\mathcal{G}$ = SU (2), les champs de jauge s'appellent *champs de Yang-Mills.*

L'égalité (14) signifie que $F = DA$ (voir formule (15) de la leçon 21), si bien que l'équation (16) s'écrit pour le potentiel A:

(17) $$D * DA = 0;$$

c'est exactement la formule (8).

La nature physique des champs de jauge exige qu'ils s'annulent à l'infini, i.e. que

(18) $$F_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \to 0, \quad |\mathbf{x}| \to \infty,$$

pour tout α et tout β.

On en tient compte par un procédé commode qui consiste à passer au compactifié $\mathbb{R}^4 \cup \{\infty\}$ de $\mathbb{R}^4$. (Le champ F est prolongé par zéro en le point ∞.) Il y a avantage à utiliser la projection stéréographique et à passer de l'espace $\mathbb{R}^4 \cup \{\infty\}$ à la sphère S^4. En coordonnées stéréographiques de pôle $\mathbf{e}_4$, le potentiel A est une forme différentielle linéaire sur la sphère épointée $U^{(+)} = S^4 \setminus \{\mathbf{e}_4\}$, et la condition (18) est remplie si et seulement si l'on trouve sur la sphère épointée $U^{(-)} = S^4 \setminus \{-\mathbf{e}_4\}$ un potentiel B tel qu'il soit égal à 0 en $\mathbf{e}_4$ et qu'il y ait, en dehors de $\pm\mathbf{e}_4$, une équivalence de jauge entre B et A. Le potentiel B est défini sur $\mathbb{R}^4$ sauf en 0, et il est lié à A en dehors de ce point par

(19) $$A = g^{-1}Bg + g^{-1}\,dg,$$

avec g une application différentiable $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \to \mathcal{G}$.

L'application g considérée comme $S^4 \setminus \{-\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4\} \to \mathcal{G}$ n'est autre qu'un cocycle du recouvrement à deux éléments $\{U^{(-)}, U^{(+)}\}$ de S^4 sur le groupe $\mathcal{G}$, si bien qu'elle définit un $\mathcal{G}$-fibré principal ξ au-dessus de S^4. Cela étant, les potentiels A et B sont les formes d'une connexion ∇ sur ξ, et le champ F est la forme de courbure de ∇ (sur $U^{(+)} = S^4 \setminus \{\mathbf{e}_4\}$; par hypothèse, la forme de courbure de ∇ est nulle en $\mathbf{e}_4$).

Comme B est nul en e_4, la condition (19) équivaut sur $\mathbb{R}^4$ à l'égalité asymptotique

$$(19') \qquad A \sim g^{-1}\,dg \quad \text{pour } |\mathbf{x}| \to \infty.$$

Donner cette égalité, c'est définir de façon unique le fibré ξ et le potentiel B, donc la connexion ∇.

Ainsi, on connaît deux langages absolument équivalents pour décrire les potentiels des champs de jauge de groupe $\mathcal{G}$. Ce sont tantôt les formes différentielles linéaires (5) sur $\mathbb{R}^4$ à valeurs dans $\mathfrak{g}$ qui vérifient (19'), avec g une fonction définie sur $\mathbb{R}^4$ au voisinage de ∞ à valeurs dans $\mathcal{G}$, et tantôt les connexions sur les $\mathcal{G}$-fibrés principaux de base S^4, les fonctions g n'étant autres que les cocycles de recollement de ces fibrés.

Il existe entre deux champs (potentiels) une *équivalence de jauge* s'ils se transforment mutuellement par un automorphisme de ξ sur S^4.

On note que cette réduction des champs aux connexions ne saurait être considérée comme complète puisque les premiers doivent vérifier en outre l'équation de Yang-Mills (16) qui ne s'appuie pour l'instant sur aucun support sensible.

Et pourtant un physicien en tirera profit. On voit par exemple que chaque champ possède un invariant, classe d'homotopie des applications $S^3 \to \mathcal{G}$. Dans le cas du groupe $SU(2) = S^3$, cet invariant est caractérisé par un nombre entier (degré) k. Ce nombre de signe contraire est connu en physique sous le nom de *charge topologique*.

* * *

D'autre part, on connaît un procédé d'élimination des équations mystérieuses (16). Il consiste à se borner aux champs autoduaux ou anti-autoduaux, i.e. aux champs F (voir leçon 21) tels que

$$(20) \qquad *F = \pm F.$$

Dans ce cas, (16) devient l'équation de Bianchi $DF = 0$, i.e. elle est nécessairement vérifiée. Ainsi, *les potentiels des champs (anti-)autoduaux sur* $\mathbb{R}^4$ *sont exactement les connexions sur les fibrés principaux sur* S^4 *de formes de courbures (anti-)autoduales (qui s'annulent au point* e_4*).*

Cette réduction à la géométrie est totalement adéquate.

On note que la notion de champs (anti-)autoduaux n'a de sens que sur $\mathbb{R}^4$ *euclidien*. [Bien qu'on définisse l'opérateur de Hodge $*$ sur l'espace de Minkowski, on a $*^2 = -1$, si bien que les équations (20) ont lieu pour $F = 0$ seul.]

Soit $\mathcal{G} = SU(2)$. Les champs autoduaux de charge positive et les champs anti-autoduaux de charge négative s'appellent *multi-instantons*. Un multi-instanton de charge k est un *k-instanton*. Ainsi,

les k-instantons sont les champs de Yang-Mills F de charge k tels que

$$*F = (\text{sgn } k)\, F.$$

[On verra plus loin que $*F = -(\text{sgn } k)\, F$ n'est possible que pour $F = 0$.] Les multi-instantons de $k = 1$ sont des *instantons* tout court, et si $k = -1$, on parle des *anti-instantons.*

On comprend maintenant qu'à la fin de la leçon 21 *nous avons construit de façon explicite toute une série d'instantons* $F_{\lambda,\,\mathfrak{b}}$. Belavin, Polyakov, Schwartz et Tyupkin ont été les premiers à le faire en 1975. En 1978, Atiyah, Drinfeld, Hitchin et Manin ont montré que *tout instanton n'est équivalent au sens de la jauge qu'à un, et un seul, instanton* $F_{\lambda,\,\mathfrak{b}}$. Il nous est impossible d'en reproduire la démonstration.

On construit les analogues des $F_{\lambda,\,\mathfrak{b}}$ pour tout k (et le théorème d'Atiyah, Drinfeld, Hitchin et Manin reste juste), mais cette description ne fournit pas pour $|k| > 1$ de formules explicites (si $k > 1$, λ et $\mathbf{b}$ sont le vecteur quaternionique $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ et la $(k \times k)$-matrice symétrique quaternionique $\mathbf{B}$ assujettis à certaines conditions à étudier).

Ces conditions sont:

a) la matrice $\bar{\mathbf{B}}\mathbf{B} + \bar{\lambda}^{\mathrm{T}}\lambda$ est réelle diagonale,
b) quel que soit le quaternion $\mathbf{x} \in \mathbb{H}$, les équations

$$\mathbf{B}\xi = \mathbf{x}\xi, \quad \lambda\xi = 0,$$

$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k)^{\mathrm{T}}$ étant une colonne des quaternions, admettent une solution unique $\xi = 0$.

Le changement de signe de k se ramène à permuter $\mathrm{d}\mathbf{x}$ et $\mathrm{d}\bar{\mathbf{x}}$.

* * *

La notion de charge topologique des champs de Yang-Mills soulève le problème de la calculer explicitement à l'aide du champ F sans recours au potentiel A. Il se trouve que ce problème admet une solution élégante.

Quelles que soient les formes

$$F = \sum_{\alpha<\beta} F_{\alpha\beta}\, \mathrm{d}x^\alpha \wedge \mathrm{d}x^\beta, \quad G = \sum_{\alpha<\beta} G_{\alpha\beta}\, \mathrm{d}x^\alpha \wedge \mathrm{d}x^\beta$$

de degré 2 sur $\mathbb{R}^4$, la forme $F \wedge *G$ est de degré maximal 4. Elle s'exprime, on le constate facilement, par

$$F \wedge *G = \Big(\sum_{\alpha<\beta} F_{\alpha\beta} G_{\alpha\beta}\Big)\, \mathrm{d}\mathbf{x}, \tag{21}$$

où $\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^4$. Si F et G vérifient la condition (18), i.e. on les considère comme formes sur $\mathbf{S}^4$, alors il en est de

même de $F \wedge *G$, si bien que la compacité de $\mathbb{S}^4$ entraîne l'existence de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{S}^4} F \wedge *G = \int_{\mathbb{R}^4} \Big(\sum_{\alpha<\beta} F_{\alpha\beta} G_{\alpha\beta}\Big)\, dx.$$

Si F et G sont à coefficients numériques (réels), cette intégrale est notée $\langle F, G\rangle$ (c'est le *produit scalaire* des formes F et G). La formule (21) entraîne de suite que cette multiplication définit sur l'espace des formes $\Omega^2(\mathbb{S}^4)$ une structure d'espace euclidien (ou encore une structure d'*espace préhilbertien*, terminologie à préférer à cause de la dimension infinie de $\Omega^2(\mathbb{S}^4)$).

Si les coefficients des formes sont dans l'algèbre matricielle $\mathfrak{su}(2)$, il faut au préalable prendre la trace. On multiplie de plus par -1 pour obtenir le produit scalaire défini positif. Ainsi, on pose pour les formes à valeurs dans $\mathfrak{su}(2)$:

$$\langle F, G\rangle = -\int_{\mathbb{S}^4} \mathrm{Tr}(F \wedge *G). \tag{22}$$

Si on les interprète comme formes à coefficients dans $\mathbb{H}'$, l'opération de prise de la trace devient 2Re, si bien que

$$\langle F, G\rangle = -2\int_{\mathbb{S}^4} \mathrm{Re}(F \wedge *G). \tag{22'}$$

Problème 1. Montrer que la charge topologique k de tout champ de Yang-Mills est donnée par

$$k = \frac{1}{8\pi^2}\langle F, *F\rangle, \tag{23}$$

i.e. par

$$k = -\frac{1}{8\pi^2}\int_{\mathbb{S}^4} \mathrm{Tr}\,(F \wedge F). \tag{23'}$$

La formule (23) jouit d'une autre propriété inattendue, savoir elle permet de caractériser les multi-instantons en tant que points de minimum d'une fonctionnelle. En effet, l'opérateur de Hodge $*$ est évidemment auto-adjoint (symétrique) par rapport au produit scalaire (22). Aussi, ses sous-espaces propres associés aux valeurs propres ± 1 (i.e. les espaces des formes autoduales et anti-autoduales) sont-ils orthogonaux, et ils réduisent $*$. Cela signifie que toute forme F admet une représentation unique

$$F = F^{(+)} + F^{(-)},$$

avec $F^{(+)}$, $F^{(-)}$ orthogonales, la première étant autoduale et la seconde anti-autoduale. Le carré de la norme $\|F\|^2 = \langle F, F\rangle$ vérifie

donc

$$\| F \|^2 = \| F^{(+)} \|^2 + \| F^{(-)} \|^2,$$

et on a pour la charge topologique k:

$$k = \frac{1}{8\pi^2} (\| F^{(+)} \|^2 - \| F^{(-)} \|^2).$$

Aussi

(24) $$\| F \| \geqslant 8\pi^2 |k|,$$

l'égalité n'ayant lieu que si $*F = (\text{sgn } k) F$, i.e. pour les multi-instantons. (On voit de plus que $*F = -(\text{sgn } k) F$ est possible pour $F = 0$ seul; voir ci-dessus.)

D'autre part, le calcul direct par les formules explicites de Belavin, Polyakov, Schwartz et Tyupkin de la leçon 21 montre que dans le cas des multi-instantons l'inégalité (24) devient l'égalité.

Problème 2. Vérifier cette affirmation pour $k = 1$.

* * *

On appelle *fonctionnelle de Yang-Mills* une fonctionnelle sur l'espace de tous les potentiels A à valeurs dans $\mathfrak{su}(2)$, définie par la formule

(25) $$A \mapsto \| F_A \|,$$

où F_A est la forme de courbure de la connexion A. Ainsi, *les multi-instantons (ou, plus précisément, leurs potentiels) sont exactement les points de minimum d'une fonctionnelle de Yang-Mills.*

Remarque 1. On introduit en analyse fonctionnelle non linéaire (calcul des variations) la notion de point stationnaire d'une fonctionnelle (qui est un analogue de la notion de point stationnaire d'une fonction d'un nombre fini de variables). Il se trouve que *les champs de Yang-Mills sont exactement les points stationnaires d'une fonctionnelle de Yang-Mills.*

D'ailleurs, la question de savoir si ces champs qui ne sont pas des multi-instantons existent reste ouverte. (La réponse est positive pour le groupe SU (3) (champ de gluons).)

* * *

L'égalité maîtresse (23') est un exemple de formules intégrales très générales relatives aux fibrés principaux arbitraires ou, ce qui revient au même en principe, aux fibrés vectoriels ξ quelconques, qui en expriment les invariants topologiques (plus précisément, les classes de cohomologie de certaines formes différentielles remarqua-

bles sur leurs bases) au moyen des formes de courbure des connexions sur ces fibrés.

On construit ces formes après certains préliminaires.

Soit $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel de toutes les matrices carrées d'ordre n sur un corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), et soit

$$F : \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K} \tag{26}$$

la fonction $A \mapsto F(A)$, $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$, polynôme en les éléments a^i_j de la matrice $A = \| a^i_j \|$.

Définition 1. La fonction (26) telle que

$$F(AB) = F(BA)$$

pour $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ quelconques s'appelle *polynôme invariant.*

Problème 3. Montrer que *la fonction* (26) *est un polynôme invariant si et seulement si*

$$F(C^{-1}AC) = F(A)$$

pour toute matrice non dégénérée $C \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$ (*et toute* $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$).

Les exemples de polynômes invariants sont la trace $\mathrm{Tr}\, A$, le déterminant $\det A$ et toutes les fonctions symétriques élémentaires $\sigma_k(A)$, $1 \leqslant k \leqslant n$, des racines caractéristiques $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de la matrice A (i.e., au signe de $(-1)^k$ près, les coefficients du polynôme caractéristique $f_A(\lambda) = \det |A - \lambda E|$ de A).

On note que $\sigma_1 = \mathrm{Tr}$ et $\sigma_n = \det$.

Problème 4. Démontrer que *tout polynôme invariant F s'écrit comme polynôme en les polynômes* $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$. [*Indication.* Démontrer que la valeur de F sur une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ quelconque est un polynôme symétrique en $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, si bien qu'elle constitue par le *théorème fondamental de la théorie des fonctions symétriques* un polynôme en $\sigma_1(D), \ldots, \sigma_n(D)$. Utiliser ensuite la propriété des matrices $C^{-1}DC$, $C \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{C})$, d'être partout denses dans $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$.]

Problème 5. Démontrer que *si F est un polynôme invariant, alors*

$$F(A^\top) = F(A)$$

pour toute matrice A. [*Indication.* Les matrices A et $A^\top$ ont mêmes racines caractéristiques.]

Les polynômes invariants ci-dessous seront de règle *homogènes.*

Problème 6. Démontrer que *les composantes homogènes d'un polynôme invariant quelconque sont encore des polynômes invariants.*

Ainsi, chaque polynôme invariant est somme de polynômes invariants homogènes.

Soit F un polynôme, et soient $F^j_i = \dfrac{\partial F}{\partial a^i_j}$ les dérivées partielles de F par rapport à ses indéterminés a^i_j. Quelle que soit la

matrice $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathsf{K})$, les valeurs $F_i^j(A)$ de ces dérivées forment une matrice $\|F_i^j(A)\|$ désignée par $F'(A)$.

On note que la formule classique $dF = \frac{\partial F}{\partial x^i}\, dx^i$ devient pour la différentielle de la fonction (26):

$$\mathrm{d}F = F_i^j\, \mathrm{d}a_j^i,$$

et, en notations matricielles,

$$\mathrm{d}F(A) = \mathrm{Tr}\,(F'(A)\, \mathrm{d}A). \tag{27}$$

Cette formule signifie qu'on a pour toute fonction matricielle différentiable $t \mapsto A(t) = \|a_j^i(t)\|$:

$$\frac{\mathrm{d}F(A(t))}{\mathrm{d}t} = \mathrm{Tr}\left(F'(A(t))\,\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}\right), \tag{28}$$

où $\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}$ est la matrice des dérivées $\left\|\frac{\mathrm{d}a_j^i(t)}{\mathrm{d}t}\right\|$.

Lemme 1. *Si le polynôme F est invariant, les matrices $F'(A)$ et A, $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathsf{K})$ quelconque, commutent:*

$$AF'(A) = F'(A)\,A. \tag{29}$$

D é m o n s t r a t i o n. Soit E_k^l l'unité matricielle $\|\delta_k^i \delta_j^l\|$ (matrice dont tous les termes sont nuls sauf celui d'indice (k, l) qui vaut 1). F étant invariant, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$F((E + tE_k^l)\,A) = F(A\,(E + tE_k^l)). \tag{30}$$

Comme la matrice

$$\frac{\mathrm{d}(E + tE_k^l)\,A}{\mathrm{d}t} = E_k^l A$$

est donnée par

$$E_k^l A = \|\delta_k^i a_j^l\|$$

(toutes ses lignes sont nulles sauf peut-être la ligne k qui coïncide avec la colonne l de la matrice A) et la matrice

$$\frac{\mathrm{d}A\,(E + tE_k^l)}{\mathrm{d}t} = AE_k^l$$

par

$$AE_k^l = \|a_k^i \delta_j^l\|$$

(elle a toutes ses colonnes nulles sauf éventuellement la l-ième qui coïncide avec la ligne k de la matrice A), on dérive (30) par la formule (28) et on pose $t = 0$, il vient

$$F_k^j(A)\, a_j^l = F_i^l(A)\, a_k^i,$$

relation équivalente à cent pour cent à l'identité (29). □

* * *

Soit $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{X})$ un fibré vectoriel différentiable de rang n sur une variété différentiable $\mathscr{X}$. On se donne arbitrairement sur ξ une connexion H et on considère son tenseur de courbure R et les formes matricielles Ω qui définissent R sur les voisinages trivialisants $U \subset \mathscr{X}$ (voir leçon 19).

Chaque fonction (26) est évidemment prolongeable en les matrices A dont les termes ne sont pas des nombres, mais les éléments d'une algèbre commutative arbitraire sur $\mathbb{K}$. Comme la multiplication des formes différentielles de degré pair est commutative, on définit en particulier sur chaque U, pour le polynôme homogène (26) quelconque, la forme différentielle $F(\Omega)$ (on calcule $F(\Omega)$ si l'on substitue Ω_j^i à a_j^i dans F et qu'on considère toutes les opérations de multiplication comme multiplications extérieures $\wedge$). La matrice Ω dépend du choix de la trivialisation de ξ au-dessus de U, et elle devient $C^{-1}\Omega C$ par un changement de trivialisation, C étant la matrice de passage sur l'algèbre $\mathsf{F}U$ qui lie ces trivialisations (bases du $\mathsf{F}U$-module $\Gamma(\xi|_U)$). Si F est invariant, la forme $F(\Omega)$ ne dépend donc du choix de la trivialisation au-dessus de U, si bien que $F(\Omega)$ construites pour tous les voisinages U possibles sont compatibles sur les intersections. Par conséquent, elles définissent une forme différentielle (sur $\mathbb{K}$) sur la variété $\mathscr{X}$ tout entière.

Cette dernière forme sera désignée par $F(R)$.

On note que $F(R)$ est de degré $2r$, r étant le degré de F (qui est, on le rappelle, un polynôme invariant homogène).

Proposition 1. *Quel que soit le polynôme invariant homogène F, la forme $F(R)$ est fermée:*

$$dF(R) = 0.$$

D é m o n s t r a t i o n. Il suffit de montrer que $dF(\Omega) = 0$ sur tout U. Comme l'opérateur d sur les formes de degré pair est une dérivation (il vérifie la règle classique de dérivation d'un produit), on calcule $dF(\Omega)$ par (27) qui devient pour $A = \Omega$:

$$dF(\Omega) = \mathrm{Tr}\,(F'(\Omega) \wedge d\Omega).$$

D'autre part,

$$F'(\Omega) \wedge d\Omega = F'(\Omega) \wedge \omega \wedge \Omega - F'(\Omega) \wedge \Omega \wedge \omega$$

5 Зак. 569

(voir identité de Bianchi; formule (39) de la leçon 19), et

$$F'(\Omega) \wedge \Omega = \Omega \wedge F'(\Omega)$$

conformément au lemme 1 (appliqué à la matrice $A = \Omega$). Aussi

$$F'(\Omega) \wedge d\Omega = \Xi \wedge \Omega - \Omega \wedge \Xi,$$

où $\Xi = F'(\Omega) \wedge \omega$, donc

$$\mathrm{Tr}\,(F'(\Omega) \wedge d\Omega) = \mathrm{Tr}\,(\Xi \wedge \Omega - \Omega \wedge \Xi) = 0. \quad \square$$

On rappelle (voir leçon III.20) qu'on définit pour toute variété $\mathscr{X}$ et chaque $k \geqslant 0$ le groupe de cohomologie de de Rham $H^k\mathscr{X}$ (qui est en fait un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$) à éléments les classes de cohomologie $[\omega]$ des formes fermées ω de degré k sur $\mathscr{X}$. Si les formes considérées sont à coefficients complexes, on aboutit de même aux *groupes de cohomologie complexes* $H^k_{\mathbb{C}}\mathscr{X}$.

Problème 7. Montrer que le vectoriel $H^k_{\mathbb{C}}\mathscr{X}$ est le complexifié de l'espace vectoriel $H^k\mathscr{X}$. [*Indication.* Si $\omega = \omega_1 + i\omega_2$, où ω_1 et ω_2 sont des formes à coefficients réels, alors $d\omega = d\omega_1 + i\, d\omega_2$, avec $d\omega_1$ et $d\omega_2$ des formes à coefficients réels.]

Pour des raisons d'homogénéité, $H^k\mathscr{X}$ est également noté $H^k_{\mathbb{R}}\mathscr{X}$.

Selon la proposition 1, la forme $F(R)$ est fermée, si bien qu'on définit dans $H^{2r}_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$ sa classe de cohomologie $[F(R)]$. Il se trouve que $[F(R)]$ ne dépend pas du choix de la connexion H.

Proposition 2. *Soient H_0 et H_1 deux connexions sur un $\mathbb{K}$-fibré vectoriel ξ, et soient R_0 et R_1 leurs tenseurs de courbure respectifs. On a, dans le groupe $H^{2r}_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$, pour tout polynôme invariant homogène F:*

$$[F(R_0)] = [F(R_1)].$$

D é m o n s t r a t i o n. Soient $\mathrm{pr}^* H_0$ et $\mathrm{pr}^* H_1$ les images réciproques de H_0 et H_1 par la projection $\mathrm{pr}\colon \mathscr{X} \times I \to \mathscr{X}$. Comme les connexions sur tout fibré vectoriel forment un espace affine (voir leçon 18), on définit sur $\xi \times I$ pour chaque $s \in \mathbb{R}$ la connexion

$$H^I_s = (1 - s)\,\mathrm{pr}^* H_0 + s\,\mathrm{pr}^* H_1.$$

Les connexions H^I_s constituent, c'est clair, une famille différentiable et définissent donc la connexion $\{H^I_s\}$ sur $(\xi \times I) \times I$. Soit $H^I = \{H^I_s\}_{s=t}$ sa diagonalisation (voir leçon 10), et soit R^I la forme de courbure de H^I. On a pour tout $t \in I$:

$$i_t^* H^I = i_t^* H^I_t$$

(voir formule (18) de la leçon 10), où $i_t\colon \mathscr{X} \to \mathscr{X} \times I$ est l'injection $b \mapsto (b, t)$, $b \in \mathscr{X}$. Mais $\mathrm{pr} \circ i_t = \mathrm{id}$ pour t quelconque de I,

si bien que $i_t^* H_s^I = (1 - s) H_0 + sH_1$, donc $i_t^* H_t^I = (1 - t) H_0 + tH_1$. Par conséquent,

$$i_t^* H^I = (1 - t) H_0 + tH_1$$

et, en particulier, $i_0^* H^I = H_0$, $i_1^* H^I = H_1$. Aussi $R_0 = i_0^* R^I$, $R_1 = i_1^* R^I$ (voir problème 1 de la leçon 19), donc

$$F(R_0) = i_0^* F(R^I), \quad F(R_1) = i_1^* F(R^I).$$

Or, on sait (voir proposition 3 de la leçon III.20) que la correspondance $\omega \mapsto (\mathrm{pr})^* \omega$ induit pour tout k l'isomorphisme de groupes de cohomologie $H^k \mathscr{X} \to H^k(\mathscr{X} \times I)$ (et, partant, l'isomorphisme $H_{\mathbb{C}}^k \mathscr{X} \to H_{\mathbb{C}}^k(\mathscr{X} \times I)$).

Puisque $\mathrm{pr} \circ i_t = \mathrm{id}$ pour tout $t \in I$, l'isomorphisme réciproque est déterminé par $\omega \mapsto i_t^* \omega$, d'où l'on tire que si ω est une forme fermée quelconque sur $\mathscr{X} \times I$, la classe de cohomologie $i_t^* [\omega] = [i_t^* \omega]$ sur $\mathscr{X}$ ne dépend pas de $t \in I$. Quand $t = 0, 1$, on a, en particulier, $[i_0^* \omega] = [i_1^* \omega]$. Si $\omega = F(R^I)$, cela fournit l'égalité cherchée $[F(R_0)] = [F(R_1)]$. $\square$.

Ainsi, quel que soit le polynôme invariant homogène F, la formule

$$c^F(\xi) = [F(R)]$$

définit complètement dans le groupe $H_{\mathbb{K}}^{2r} \mathscr{X}$ un élément $c^F(\xi)$.

Définition 2. L'élément $c^F(\xi)$ est la *classe caractéristique* associée à F du fibré vectoriel ξ.

Les classes $c^F(\xi)$ sont définies sous la condition nécessaire et suffisante que le fibré $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{X})$ admette au moins une connexion. Par conséquent (voir proposition 2 de la leçon 18), *elles le sont pour tout* ξ *vectoriel numérotable* (en particulier, pour $\mathscr{X}$ paracompacte).

Dans la suite, *la variété* $\mathscr{X}$ *sera supposée paracompacte*, ce qui nous évitera des répétitions fastidieuses.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Puisque $H_{\mathbb{C}}^{2r} \mathscr{X}$ est le complexifié de $H_{\mathbb{R}}^{2r} \mathscr{X} = H^{2r} \mathscr{X}$, on voudrait naturellement savoir pour quels F la classe caractéristique $c^F(\xi)$ est réelle (appartient à $H^{2r} \mathscr{X}$) ou imaginaire pure (s'écrit $i[\omega]$, avec $[\omega] \in H^{2r} \mathscr{X}$).

Soit F un polynôme invariant homogène de degré r *à coefficients réels.*

Proposition 3. *Quel que soit le fibré vectoriel complexe* ξ, *la classe caractéristique* $c^F(\xi)$ *est réelle pour* r *pair et imaginaire pure dans le cas contraire.*

Démonstration. La variété $\mathscr{X}$ est paracompacte, donc ξ est numérotable, si bien qu'il existe sur ξ une métrique et une connexion H compatible avec la métrique (problème 7 de la leçon 11). La matrice Ω des formes de courbure de H par rapport à une base

orthonormée du module $\Gamma(\xi \mid_U)$ est antihermitienne sur chaque voisinage trivialisant U (voir proposition 4 de la leçon 11), i.e. elle vérifie

$$\Omega^{\mathsf{T}} = -\bar{\Omega}. \tag{31}$$

Mais on sait (problème 4) que $F(\Omega^{\mathsf{T}}) = F(\Omega)$. Le polynôme F étant à coefficients réels,

$$F(\bar{\Omega}) = \overline{F(\Omega)}.$$

Comme

$$F(-\Omega) = (-1)^r F(\Omega),$$

cela prouve que

$$F(\Omega) = F(\Omega^{\mathsf{T}}) = F(-\bar{\Omega}) = (-1)^r\, \overline{F(\Omega)}.$$

Cela signifie pour r pair que la forme $F(R)$ est réelle (si bien que sa classe de cohomologie $[F(R)]$ dans $H^{2r}_{\mathbb{C}}\mathscr{X}$ appartient à $H^{2r}\mathscr{X}$) et, pour r impair, qu'elle s'écrit $i\omega$, avec ω une forme réelle (si bien que sa classe de cohomologie est $i[\omega]$, où $[\omega] \in H^{2r}\mathscr{X}$). □

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Proposition 4. *Quels que soient le polynôme invariant homogène F de degré r impair et le fibré vectoriel réel ξ,*

$$c^F(\xi) = 0.$$

La d é m o n s t r a t i o n est une réplique de celle de la proposition 3 à la différence près que l'antihermiticité (31) fait place à l'antisymétrie

$$\Omega^{\mathsf{T}} = -\Omega.$$

Aussi, $F(\Omega) = (-1)^r F(\Omega)$, d'où $F(\Omega) = 0$ pour r impair, donc $F(R) = 0$. Par conséquent,

$$c^F(\xi) = 0. \quad \square$$

L'étude des classes caractéristiques $c^F(\xi)$ sera poursuivie dans la leçon 23.

LEÇON 23

Classes caractéristiques de Chern et de Pontriaguine. — Nombres caractéristiques de Chern et de Pontriaguine. — Propriétés des classes de Chern et de Pontriaguine. — Classes de Chern et de Pontriaguine complètes. — Caractères de Chern et de Pontriaguine. — Classe caractéristique d'Euler. — $\widetilde{K}$-foncteur. — Fibrés et espaces de type fini.

On rappelle (voir proposition 1 de la leçon III.19) qu'on a pour deux formes différentielles ω_1 et ω_2 quelconques

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^r \omega_1 \wedge d\omega_2,$$

avec r le degré de ω_1. Par conséquent,

a) si ω_1 et ω_2 sont fermées, il en est de même de la forme $\omega_1 \wedge \wedge \omega_2$;

b) si l'une au moins des formes fermées ω_1 et ω_2 est exacte, la forme $\omega_1 \wedge \omega_2$ l'est également.

Aussi, la formule

$$c_1 \wedge c_2 = [\omega_1 \wedge \omega_2]$$

définit bien le produit de deux classes de cohomologie $c_1 = [\omega_1]$, $c_2 = [\omega_2]$ quelconques. Cette multiplication est associative et anticommutative ($c_1 \wedge c_2 = (-1)^{r_1 r_2} c_2 \wedge c_1$, où $r_1 = \deg c_1$, $r_2 = \deg c_2$). En particulier, *la multiplication des classes de cohomologie de degré pair est commutative.*

Nous écrirons de règle $c_1 c_2$ au lieu de $c_1 \wedge c_2$.

Remarque 1. Certains auteurs emploient la notation $c_1 \cup c_2$.

Le problème 3 de la leçon précédente entraîne de suite que *chaque classe caractéristique $c^F(\xi)$ est un polynôme en les classes caractéristiques*

(1) $$c^{\sigma_1}(\xi), \ldots, c^{\sigma_n}(\xi)$$

associées aux polynômes invariants élémentaires $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$. Ce fait explique la place spéciale des classes (1).

Définition 1. Si $K = \mathbb{C}$, les classes caractéristiques

$$c_r(\xi) = \frac{1}{(2\pi i)^r} c^{\sigma_r}(\xi), \quad r = 1, \ldots, n,$$

s'appellent *classes de Chern* d'un fibré vectoriel complexe ξ.

Selon la proposition 3 de la leçon 22, *toutes les classes de Chern sont réelles.*

La classe $c_r(\xi)$ est de degré $2r$, donc $c_r(\xi) = 0$ si $2r > m$, où $m = \dim \mathscr{X}$. Aussi, seul nous intéresse le cas $2r \leqslant m$.

La définition des classes $c_r(\xi)$ se généralise facilement à $r = 0$ si l'on suppose par définition que

$$c_0(\xi) = 1$$

pour tout fibré ξ. (1 est en l'occurrence un élément du groupe $H^0\mathscr{X}$ associé à la fonction $\equiv 1$; voir proposition 2 de la leçon III.20.)

Définition 2. Si $K = \mathbb{R}$, les classes caractéristiques

$$p_r(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{2r}} c^{\sigma_{2r}}(\xi), \quad r = 1, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right],$$

s'appellent *classes de Pontriaguine* d'un fibré vectoriel réel ξ. (Les classes $c^{\sigma_{2r+1}}(\xi) = 0$ par suite de la proposition 4 de la leçon 22.)

Par définition, on pose de plus

$$p_0(\xi) = 1$$

pour tout fibré ξ.

La classe $p_r(\xi)$ est de degré $4r$, aussi ces classes ne sont $\neq 0$ que pour $4r \leqslant m$.

Remarque 2. En topologie algébrique, on définit les classes caractéristiques de Chern et de Pontriaguine en tant qu'éléments des *groupes de cohomologie sur* $\mathbb{Z}$ dont les éléments sont en général d'ordre fini. Les groupes de cohomologie sur $\mathbb{Z}$ s'appliquent de façon naturelle dans les groupes de cohomologie de de Rham $H^k\mathscr{X}$. Tous les éléments d'ordre fini deviennent naturellement 0, et cet homomorphisme applique les classes caractéristiques sur $\mathbb{Z}$ dans les classes définies ci-dessus (qu'on appelle alors *classes caractéristiques sur* $\mathbb{R}$).

* * *

Si la variété $\mathscr{X}$ est de dimension m paire, $m = 2l$, et que $\mathscr{X}$ soit compacte et orientable, on définit pour tout fibré complexe ξ sur $\mathscr{X}$ et toute décomposition $l = i_1 + \ldots + i_k$ de l en somme de termes positifs (au signe fonction du choix de l'orientation de $\mathscr{X}$ près) le nombre

$$c_{\mathrm{i}}(\xi) = \int_{\mathscr{X}} c_{i_1}(\xi) \wedge \ldots \wedge c_{i_k}(\xi), \quad \mathrm{i} = (i_1, \ldots, i_k),$$

appelé i-*ième nombre de Chern* du fibré complexe ξ.

On définit de même pour $m = 4l$ pour tout fibré réel ξ sur $\mathscr{X}$ le i-*ième nombre de Pontriaguine*

$$p_{\mathrm{i}}(\xi) = \int_{\mathscr{X}} p_{i_1}(\xi) \wedge \ldots \wedge p_{i_k}(\xi),$$

$$\mathrm{i} = (i_1, \ldots, i_k), \quad i_1 + \ldots + i_k = l.$$

Fait remarquable (qui découle de suite de la remarque 2 et dont la démonstration analytique directe est évidemment inexistante), *$c_{\mathrm{i}}(\xi)$ et $p_{\mathrm{i}}(\xi)$ sont tous des entiers naturels.*

Exemple 1. Si dim $\mathscr{X} = 4$, on définit pour tout fibré complexe ξ sur $\mathscr{X}$ deux nombres de Chern $c_{(1,1)}(\xi)$ et $c_{(2)}(\xi)$ donnés (pour $\mathscr{X}$ orientée de façon convenable) par

$$c_{(1,1)}(\xi) = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\mathscr{X}} \operatorname{Tr} \Omega \wedge \operatorname{Tr} \Omega, \quad c_{(2)}(\xi) = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\mathscr{X}} \det \Omega.$$

Si ξ est un SU (n)-fibré, si bien que la forme Ω prend ses valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(n)$ des matrices antihermitiennes de trace nulle, alors $\operatorname{Tr} \Omega = 0$, donc $c_{(1,1)}(\xi) = 0$. Soit $n = 2$. On établit de façon élémentaire que toute matrice antihermitienne de trace nulle A d'ordre 2 vérifie $\det A = -\frac{1}{2} \operatorname{Tr} A^2$. Aussi,

$$c_{(2)}(\xi) = -\frac{1}{8\pi^2} \int\limits_{\mathscr{X}} \operatorname{Tr}(\Omega \wedge \Omega).$$

Quand $\mathscr{X} = S^4$, le second membre coïncide à des notations près avec le second membre de la formule (23′) de la leçon précédente. Par conséquent, *la charge topologique k d'un champ de Yang-Mills F quelconque est égale au nombre de Chern* $c_{(2)}(\xi)$ *du fibré vectoriel correspondant* (associé au SU (2)-fibré principal sur lequel F est une forme de courbure).

Ainsi, la notion de charge topologique s'incorpore en fait dans la théorie générale des classes caractéristiques.

On voit de plus que $c_{(2)}(\xi)$ du cas considéré est en réalité un entier.

Problème 1. Démontrer qu'on a pour tout $r \geqslant 0$

$$p_r(\xi) = (-1)^r c_{2r}(\xi^{\mathbf{C}}),$$

avec $\xi^{\mathbf{C}}$ le complexifié (voir leçon 6) du fibré vectoriel réel ξ.

* * *

Théorème 1. *Les classes caractéristiques de Chern et de Pontriaguine présentent les propriétés suivantes:*

a. *On a pour toute application différentiable* $f: \mathscr{X}' \to \mathscr{X}$ *et tout* $r \geqslant 0$

$$c_r(f^*\xi) = f^*c_r(\xi), \quad p_r(f^*\xi) = f^*p_r(\xi).$$

b. *Toutes les classes de degré positif sont nulles pour le fibré trivial* $\theta = \theta^n_{\mathscr{X}}$:

$$c_r(\theta) = 0, \quad p_r(\theta) = 0, \quad r \geqslant 0.$$

c. *Quels que soient les fibrés vectoriels* ξ *et* η *sur une même variété* $\mathscr{X}$, *on a pour tout* $r \geqslant 0$

$$c_r(\xi \oplus \eta) = \sum_{i+j=r} c_i(\xi)\, c_j(\eta) =$$
$$= c_r(\xi) + c_{r-1}(\xi)\, c_1(\eta) + \ldots + c_1(\xi)\, c_{r-1}(\eta) + c_r(\eta),$$
$$p_r(\xi \oplus \eta) = \sum_{i+j=r} p_i(\xi)\, p_j(\eta) =$$
$$= p_r(\xi) + p_{r-1}(\xi) p_1(\eta) + \ldots + p_1(\xi)\, p_{r-1}(\eta) + p_r(\eta).$$

Démonstration. La propriété a découle évidemment des propriétés correspondantes des connexions et des formes de courbure. On a b sous la condition suffisante que le fibré trivial θ admette une connexion pour laquelle toutes les formes ω^i_j et, partant, toute les formes Ω^i_j sont identiquement nulles. Passons à la propriété c.

Soient H^ξ et H^η des connexions arbitraires sur ξ et η respectivement. Dans chaque carte $\mathscr{E}^\zeta_U$, où $\zeta = \xi$ ou η, la connexion H^ζ est l'annulateur des formes

$$\overset{(\zeta)}{\theta^i} = d\overset{(\zeta)}{a^i} + \overset{(\zeta)}{\Gamma}{}^i_{jk}\, \overset{(\zeta)}{a^j}\, dx^k, \quad i = 1, \ldots, n_\zeta = \dim \zeta, \tag{2}$$

où $\overset{(\zeta)}{a^i}$, x^k sont les coordonnées dans $\mathscr{E}^\zeta_U$ associées à une trivialisation donnée de ζ au-dessus de U et à un système donné de coordonnées locales dans U (voir leçon 10). D'autre part, les trivialisations des fibrés ξ et η au-dessus de U définissent naturellement celle du fibré $\xi \otimes \eta = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{X})$ au-dessus de U qui est associée dans $\mathscr{E}_U$ aux coordonnées $\overset{(\xi)}{a^i}$, $\overset{(\eta)}{a^j}$, x^k, $1 \leqslant i \leqslant n_\xi$, $1 \leqslant j \leqslant n_\eta$ et $1 \leqslant k \leqslant m$. Aussi, on considère (2) comme formes sur $\mathscr{E}_U$, dont l'annulateur est (c'est clair) une connexion de $\xi \oplus \eta$ sur U. Les connexions sur U différents sont compatibles sur les intersections (le démontrer !), et elles définissent donc la connexion H sur $\xi \oplus \eta$ tout entier. La matrice des formes de connexion H sur U est par construction la matrice bloc

$$\begin{Vmatrix} \omega^\xi & 0 \\ 0 & \omega^\eta \end{Vmatrix}$$

avec ω^ξ et ω^η les matrices des formes de connexion H^ξ et H^η respectivement. En d'autres termes, c'est la somme directe $\omega^\xi \wedge \omega^\eta$ des matrices ω^ξ et ω^η. Mais il découle dans ce cas immédiatement de l'équation de structure de Cartan que la matrice Ω des formes de courbure de la connexion H est somme directe $\Omega^\xi \oplus \Omega^\eta$ des matrices des formes de courbure de H^ξ et H^η.

Problème 2. Montrer que *n'importe quelles matrices* A *et* B *d'ordre* n_1 *et* n_2 *respectivement vérifient l'égalité*

$$\sigma_r(A \oplus B) = \sum_{i+j=r} \sigma_i(A)\, \sigma_j(B), \quad \sigma_0(A) = \sigma_0(B) = 1, \tag{3}$$

où σ_r à gauche et σ_i, σ_j à droite sont manifestement des polynômes invariants élémentaires en les matrices d'ordre $n_1 + n_2$, n_1 et n_2 respectivement. [*Indication.* Soient $\sigma_i(\lambda)$ et $\sigma_j(\mu)$ des fonctions symétriques élémentaires des variables $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n_1}$ et $\mu_1, \ldots, \mu_{n_2}$ respectivement, et soient $\sigma_r(\lambda, \mu)$ des fonctions symétriques élémentaires des variables $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n_1}, \mu_1, \ldots, \mu_{n_2}$. On a les identités

$$\sum_{i=0}^{n_1} \sigma_i(\lambda) t^i = \prod_{i=1}^{n_1} (1 + \lambda_i t)$$

et des identités analogues pour $\sigma_j(\lambda)$ et $\sigma_r(\lambda, \mu)$, si bien que

$$\left(\sum_{i=0}^{n_1} \sigma_i(\lambda) t^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n_2} \sigma_j(\mu) t^j\right) = \sum_{r=0}^{n_1+n_2} \sigma_r(\lambda, \mu) t^r,$$

donc

$$\sigma_r(\lambda, \mu) = \sum_{i+j=r} \sigma_i(\lambda) \sigma_j(\mu).$$

Cela prouve la formule (3) pour les matrices diagonales et, partant, pour les matrices $C^{-1}DC$, D étant diagonale. On a par continuité le cas général (cf. problème 4 de la leçon 22).]

On achève la démonstration du théorème si l'on applique (3) aux matrices $A = \Omega^\xi$ et $B = \Omega^\eta$ (et si l'on prend en compte la nullité des classes $c^{\sigma_{2r+1}}(\xi)$ quand $\mathsf{K} = \mathbb{R}$). □

En termes de catégories, la propriété a des classes caractéristiques est leur *fonctorialité*. Cette propriété n'est pas certes l'apanage des classes de Chern et de Pontriaguine, elle est inhérente à toute $c^F(\xi)$. Il en résulte que deux fibrés isomorphes ξ, ξ' et tout polynôme invariant F vérifient l'égalité $c^F(\xi) = c^F(\xi')$. Aussi, on regarde c^F comme application de l'ensemble $\mathrm{Vect}^n_{\mathsf{K}}\mathscr{X}$ de toutes classes des fibrés vectoriels isomorphes de rang n sur $\mathscr{X}$ dans le groupe de cohomologie $H^{2r}_{\mathsf{K}}\mathscr{X}$.

L'application c^F est dite *classe caractéristique* elle aussi (un nom pas très réussi à notre avis).

* * *

La propriété c des classes de Chern et de Pontriaguine fait introduire les sommes directes

$$H^{2*}_{\mathsf{K}}\mathscr{X} = H^0_{\mathsf{K}}\mathscr{X} \oplus H^2_{\mathsf{K}}\mathscr{X} \oplus \ldots \oplus H^{2r}_{\mathsf{K}}\mathscr{X} \oplus \ldots$$

d'espaces vectoriels $H^{2r}_{\mathsf{K}}\mathscr{X}$. L'espace $H^{2*}_{\mathsf{K}}\mathscr{X}$ a pour éléments les sommes formelles

$$a = a_0 + a_2 + \ldots + a_{2r} + \ldots$$

(qui s'arrêtent pour $2r > n$), où a_{2r} est un élément quelconque (appelé *composante homogène* de l'élément a) de $H_K^{2r}\mathscr{X}$. Il est évidemment possible d'étendre à ces sommes l'opération de multiplication, ce qui transforme $H_K^{**}\mathscr{X}$ en une algèbre commutative avec unité sur K.

On introduit maintenant une classe caractéristique $c^F(\xi) \in H^2\mathscr{X}$ pour tout F invariant (non nécessairement homogène). On pose

$$c^F(\xi) = c^{F_0}(\xi) + c^{F_1}(\xi) + \ldots + c^{F_r}(\xi) + \ldots$$

par définition, F_r, $r \geqslant 0$, étant les composantes homogènes de F.

Définition 3. Les éléments

$$c(\xi) = \sum_{r=0}^{n} c_r(\xi) = 1 + c_1(\xi) + \ldots + c_n(\xi), \quad K = \mathbb{C},$$

$$p(\xi) = \sum_{r=0}^{[\frac{n}{2}]} p_r(\xi) = 1 + p_1(\xi) + \ldots + p_{[\frac{n}{2}]}(\xi), \quad K = \mathbb{R},$$

de l'algèbre $H^{2*}\mathscr{X}$ sont la *classe de Chern complète* du fibré complexe ξ et la *classe de Pontriaguine complète* du fibré réel ξ respectivement.

Chose à noter, la classe $p(\xi)$ appartient en réalité à la sous-algèbre

$$H^{4*}\mathscr{X} = H^0\mathscr{X} \oplus H^4\mathscr{X} \oplus \ldots \oplus H^{4r}\mathscr{X} \oplus \ldots$$

de $H^{2*}\mathscr{X}$.

La propriété **b** du théorème 1 signifie que

(4) $$c(\theta) = 1 \text{ et } p(\theta) = 1$$

pour le fibré trivial θ, et la propriété **c** équivaut à dire que

(5) $$c(\xi \oplus \eta) = c(\xi)\, c(\eta) \text{ et } p(\xi \oplus \eta) = p(\xi)\, p(\eta)$$

ξ et η étant des fibrés quelconques.

Les applications $c: \xi \mapsto c(\xi)$ et $p: \xi \mapsto p(\xi)$ de $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}^n\mathscr{X}$ et $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}^n\mathscr{X}$ (on emploie le même symbole pour un fibré vectoriel et pour sa classe de l'isomorphisme) dans $H^{2*}\mathscr{X}$ et $H^{4*}\mathscr{X}$ respectivement s'appellent *classes de Chern et de Pontriaguine complètes* elles aussi.

Les applications c *et* p *sont définies pour tout* $n \geqslant 0$, si bien qu'on les considère comme

$$c : \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\mathscr{X} \to H^{2*}\mathscr{X}, \quad p : \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\mathscr{X} \to H^{4*}\mathscr{X},$$

où

$$\mathrm{Vect}_K\mathscr{X} = \coprod_{n=0}^{\infty} \mathrm{Vect}_K^n\mathscr{X}$$

est la réunion disjointe des ensembles $\mathrm{Vect}_K^n\mathscr{X}$.

Remarque 3. Si la variété $\mathscr{X}$ est non connexe, il y a avantage à assimiler $\mathrm{Vect}_{\mathsf{K}}\mathscr{X}$ à la réunion disjointe des ensembles $\mathrm{Vect}^n_{\mathsf{K}}\mathscr{X}'$ par rapport à tous les $n \geqslant 0$ et à toutes les composantes $\mathscr{X}'$ de $\mathscr{X}$ (i.e. à examiner les fibrés vectoriels dont le rang change avec la composante de $\mathscr{X}$). Si notre formalisme y gagne en élégance, les restrictions triviales alourdissent par contre l'exposé. Aussi restons-nous fidèle à la définition précédente. Le lecteur peut (et doit !) établir de lui-même ce qu'il advient si le rang du fibré varie avec la composante.

Si l'on remplace les termes d'une somme directe de fibrés par les fibrés isomorphes, la somme devient un fibré isomorphe. Cela veut dire que l'opération $\oplus$ est en fait définie sur l'ensemble $\mathrm{Vect}_{\mathsf{K}}\mathscr{X}$ qui *est* (c'est clair) *un demi-groupe commutatif pour* $\oplus$.

Les formules (5) signifient que *les classes caractéristiques c et p sont des homomorphismes additifs-multiplicatifs* (ils transforment les sommes en les produits) *des demi-groupes* $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\mathscr{X}$ *et* $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\mathscr{X}$ *dans les demi-groupes multiplicatifs des algèbres* $H^{2*}\mathscr{X}$ *et* $H^{4*}\mathscr{X}$ (*formés de tous les éléments non nuls de ces algèbres*).

[On conçoit qu'en réalité c et p sont des homomorphismes dans les *groupes* multiplicatifs $1 + (H^{2*}\mathscr{X})^+$ et $1 + (H^{4*}\mathscr{X})^+$ formés des éléments des algèbres $H^{2*}\mathscr{X}$ et $H^{4*}\mathscr{X}$ dont la composante homogène de degré 0 est 1.]

Remarque 4. La première formule (5) reste entière pour les classes caractéristiques sur $\mathbb{Z}$ (voir remarque 2), et la seconde tombe en défaut (on lui adjoint des éléments d'ordre fini).

* * *

On appelle *série formelle invariante* une somme formelle

$$F = F_0 + F_1 + \ldots + F_r + \ldots, \tag{6}$$

avec F_r des polynômes invariants homogènes de degré r sur $\mathrm{Mat}_n(\mathsf{K})$ (*composantes homogènes* de la série F). Comme $c^{F_r}(\xi) = 0$ si $2r > m$, la somme

$$c^F(\xi) = c^{F_0}(\xi) + \ldots + c^{F_r}(\xi) + \ldots$$

d'une telle série est finie. C'est un élément de l'algèbre $H^*_{\mathsf{K}}\mathscr{X}$ qu'on appelle (ainsi que l'application $c^F : \xi \mapsto c^F(\xi)$, $\xi \in \mathrm{Vect}_{\mathsf{K}}\mathscr{X}$) *classe caractéristique* associée à la série invariante F.

On construit la série (6) pour $\mathsf{K} = \mathbb{C}$ à l'aide de la série formelle

$$F = F_0 + F_1 + \ldots + F_r + \ldots,$$

F_r étant des polynômes symétriques quelconques de degré r à n indéterminées. On pose pour toute matrice $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$

(7) $$F(A) = F(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les racines caractéristiques de A. Si l'on choisit F_r de façon que les nombres (7) soient réels pour A réelles, on aboutit également à la série invariante (6) pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Soit, par exemple,

$$F(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = e^{\lambda_1/2\pi i} + \ldots + e^{\lambda_n/2\pi i},$$

i.e.

(8) $$F(\lambda_1 \ldots, \lambda_n) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi i)^r} \frac{s_r}{r!},$$

où $s_r = \lambda_1^r + \ldots + \lambda_n^r$.

En théorie des polynômes symétriques, on démontre la *formule de Waring* qui donne

$$s_r = r \sum (-1)^{i_2+i_4+\ldots} \frac{(i_1+i_2+\ldots+i_n-1)!}{i_1!\, i_2! \ldots i_n!} \sigma_1^{i_1}\sigma_2^{i_2} \ldots \sigma_n^{i_n},$$

la sommation étant étendue à tous les entiers positifs $i_1, i_2, \ldots, i_n$, $i_1 + 2i_2 + \ldots + ni_n = r$.

Définition 4. On appelle *caractère de Chern*, et on note ch, la classe caractéristique sur $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\mathscr{X}$ associée à la série (8). Ses composantes homogènes ch_r constituent les applications

$$\mathrm{ch}_r : \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\mathscr{X} \to H^{2r}\mathscr{X}.$$

La formule de Waring implique que quel que soit le fibré complexe ξ, la classe $\mathrm{ch}_r\,\xi$ s'exprime par les classes de Chern:

(9) $$\mathrm{ch}_r\xi = \frac{1}{(r-1)!} \sum (-1)^{i_2+i_4}\ldots \frac{(i_1+i_2+\ldots+i_n-1)!}{i_1!\, i_2! \ldots i_n!} \times c_1(\xi)^{i_1} c_2(\xi)^{i_2} \ldots c_n(\xi)^{i_n}.$$

Par exemple,

$$\mathrm{ch}_0\,\xi = n \quad (n = \dim \xi),$$
$$\mathrm{ch}_1\,\xi = c_1(\xi),$$
$$\mathrm{ch}_2\,\xi = c_1(\xi)^2 - 2c_2(\xi),$$
$$\mathrm{ch}_3\,\xi = \frac{c_1(\xi)^3 - 3c_1(\xi)\, c_2(\xi) + 3c_3(\xi)}{2},$$

et ainsi de suite.

A l'instar des classes de Chern, le caractère de Chern est défini pour tous les $n \geqslant 0$, si bien qu'on le considère comme application

$$\mathrm{ch} : \mathrm{Vect}_{\mathbf{C}} \mathscr{X} \to H^{2*} \mathscr{X},$$

et qu'on assimile ses composantes homogènes ch_r à

$$\mathrm{ch}_r : \mathrm{Vect}_{\mathbf{C}} \mathscr{X} \to H^{2r} \mathscr{X}.$$

Avec la série invariante $e^{\lambda_1/2\pi} + \ldots + e^{\lambda_n/2\pi}$ on définit de même le *caractère de Pontriaguine*

$$\mathrm{ph} : \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}} \mathscr{X} \to H^{4*} \mathscr{X}$$

à composantes homogènes

$$\mathrm{ph}_r : \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}} \mathscr{X} \to H^{4r} \mathscr{X}.$$

Les composantes homogènes ph_r sur les fibrés ξ de rang n s'expriment par les classes de Pontriaguine:

$$(10) \quad \mathrm{ph}_r \xi = \frac{1}{(2r-1)!} \sum (-1)^{k_1+k_2+\ldots+k_l} \times \\ \times \frac{(k_1+k_2+\ldots+k_l-1)!}{k_1! k_2! \ldots k_n!} p_1(\xi)^{k_1} p_2(\xi)^{k_2} \ldots p_l(\xi)^{k_l},$$

avec $l = \left[\frac{n}{2}\right]$, la sommation étant étendue à tous les entiers positifs $k_1, k_2, \ldots, k_l$ soumis à la condition $k_1 + 2k_2 + \ldots + lk_l = r$.

Proposition 1. *Les applications c et p vérifient les relations*

$$\mathrm{ch}(\xi \oplus \eta) = \mathrm{ch}\, \xi + \mathrm{ch}\, \eta, \quad \mathrm{ph}(\xi \oplus \eta) = \mathrm{ph}\, \xi + \mathrm{ph}\, \eta,$$

i.e. ce sont des homomorphismes des demi-groupes $\mathrm{Vect}_{\mathbf{C}} \mathscr{X}$ *et* $\mathrm{Vect}_{\mathbf{R}} \mathscr{X}$ *dans les groupes additifs des algèbres* $H^{2*}\mathscr{X}$ *et* $H^{4*}\mathscr{X}$ *respectivement (si bien que les applications* ch_r *et* ph_r *sont des homomorphismes dans les espaces vectoriels* $H^{2r}\mathscr{X}$ *et* $H^{4r}\mathscr{X}$*).*

Démonstration. Soient $F(\lambda)$ la série (8) des variables $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n_\xi}$, $F(\mu)$ la série (8) des variables $\mu_1, \ldots, \mu_{n_\eta}$, et $F(\lambda, \mu)$ la série (8) des $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n_\xi}, \mu_1, \ldots, \mu_{n_\eta}$. Il suffit de prouver l'égalité

$$F(\lambda, \mu) = F(\lambda) + F(\mu).$$

Or, elle a évidemment lieu parce que

$$F(\lambda) = e^{\lambda_1/2\pi i} + \ldots + e^{\lambda_{n_\xi}/2\pi i}, \quad F(\mu) = e^{\mu_1/2\pi i} + \ldots + e^{\mu_{n_l}/2\pi i}$$

et

$$F(\lambda, \mu) = e^{\lambda_1/2\pi i} + \ldots + e^{\lambda_{n_\xi}/2\pi i} + e^{\mu_1/2\pi i} + \ldots + e^{\mu_{n_\eta}/2\pi i}. \ \square$$

La structure additive des algèbres $H^{2*}\mathscr{X}$ et $H^{4*}\mathscr{X}$ est infiniment plus maniable que leur structure multiplicative, ce qui avan-

tage sensiblement les caractères de Chern et de Pontriaguine en comparaison des classes complètes correspondantes.

[La présence des dénominateurs dans (9) et (10) empêche malheureusement de définir ces caractères sur $\mathbb{Z}$; voir remarque 2.]

Un autre avantage des classes caractéristiques ch et ph est qu'*elles constituent des homomorphismes pour la multiplication tensorielle*, i.e. on a pour n'importe quels fibrés vectoriels ξ et η

$$(11)\qquad \begin{aligned} \operatorname{ch}(\xi \otimes \eta) &= \operatorname{ch}\xi \operatorname{ch}\eta \quad \text{pour } \mathsf{K} = \mathbb{C}, \\ \operatorname{ph}(\xi \otimes \eta) &= \operatorname{ph}\xi \operatorname{ph}\eta \quad \text{pour } \mathsf{K} = \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(Les classes c et p ne jouissent d'aucune propriété analogue.)

Hélas! la démonstration des formules (11) nous entraînerait trop loin. (Voir d'ailleurs la remarque 3 de la leçon 24.)

Problème 3. Démontrer ces formules pour $\dim \xi = 1$ et $\dim \eta = 1$.

* * *

En plus des classes c^F, on définit pour les fibrés réels une autre classe caractéristique remarquable.

Il est connu qu'on définit pour toute matrice antisymétrique A d'ordre pair son pfaffien $\operatorname{Pf} A$, polynôme en les éléments de A tel que

$$(\operatorname{Pf} A)^2 = \det A \quad \text{et} \quad \operatorname{Pf}(C^\top AC) = \det C \cdot \operatorname{Pf} A,$$

C étant une matrice quelconque.

On suppose maintenant qu'un fibré vectoriel réel ξ est

a) orienté (voir leçon 7),

b) muni d'une métrique,

c) de rang pair $n = 2l$.

Soient $U \subset \mathscr{X}$ un voisinage trivialisant pour ξ, $s_1, \ldots, s_n$ une base orthonormée positivement orientée du module $F(\xi|_U)$, et $\Omega = \| \Omega^i_j \|$ la matrice des formes de courbure dans $s_1, \ldots, s_n$ d'une connexion sur ξ compatible avec la métrique. La forme différentielle $\operatorname{Pf}\Omega$ est alors définie sur U. Si l'on change de base, la forme Ω est remplacée par $C^{-1}\Omega C$, avec C la matrice de passage. Comme C est orthogonale ($C^\top = C^{-1}$) et unimodulaire ($\det C = 1$), $\operatorname{Pf}(C^{-1}\Omega) = \operatorname{Pf}\Omega$. Ainsi, les formes $\operatorname{Pf}\Omega$ sont compatibles sur les intersections, et elles constituent donc une forme différentielle $\operatorname{Pf} R$ de degré n sur la variété $\mathscr{X}$ tout entière.

Problème 4. Démontrer que $d\operatorname{Pf} R = 0$. [*Indication.* Démontrer que les matrices $\operatorname{Pf}' A = \left\| \dfrac{\partial \operatorname{Pf} A}{\partial a^i_j} \right\|$ et A commutent pour A antisymétrique quelconque; voir lemme 1 de la leçon 22.]

Problème 5. Démontrer que *la classe de cohomologie* $[\operatorname{Pf} R]$ *de la forme* $\operatorname{Pf} R$ *ne dépend pas du choix de la métrique et de la connexion*

métrique sur ξ. [*Indication.* Quelles que soient les métriques Q_0 et Q_1 sur ξ, la fonction $(1-t)\,Q_0 + tQ_1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, est une métrique.]

Définition 5. La classe de cohomologie

$$e(\xi) = \frac{(-1)^l}{(2\pi)^l}\,[\mathrm{Pf}\,R], \quad l = \frac{n}{2},$$

s'appelle *classe d'Euler* du fibré vectoriel réel orienté ξ de rang $n = 2l$.

Son degré est n, et

$$e(\xi)^2 = p_l(\xi).$$

Si n est impair, on admet par convention que $e(\xi) = 0$.

Chose à retenir, à la différence des classes caractéristiques de Pontriaguine, la classe d'Euler n'est définie que pour ξ orienté.

Problème 6. Soit $-\xi$ le fibré dont l'orientation est opposée à elle de ξ. Montrer que

$$e(-\xi) = -e(\xi).$$

Quel que soit le fibré complexe ξ de rang n, son décomplexifié $\xi_{\mathbf{R}}$ (voir leçon 6) est (voir leçon 7) un fibré vectoriel réel orienté de rang pair $2n$, si bien qu'on définit pour lui la classe d'Euler $e(\xi_{\mathbf{R}})$.

Problème 7. Montrer que

$$e(\xi_{\mathbf{R}}) = c_n(\xi).$$

La classe d'Euler présente manifestement la propriété de fonctorialité (propriété **a** du théorème 1), et elle est nulle pour le fibré trivial θ (propriété **b** dudit théorème). On a également une réplique de **c**.

Problème 8. Démontrer que *deux fibrés vectoriels orientés quelconques* ξ *et* η *vérifient l'égalité*

$$e(\xi \oplus \eta) = e(\xi)\, e(\eta) \tag{12}$$

sous l'hypothèse évidente que l'orientation du fibré $\xi \oplus \eta$ est induite par celles de ξ et η. [*Indication.* Démontrer que $\mathrm{Pf}\,(A \oplus B) = \mathrm{Pf}\,A \cdot \mathrm{Pf}\,B$, A et B étant des matrices antisymétriques arbitraires.]

On insiste sur *la validité de* (12) *pour* ξ *et* η *de rang quelconque* (*non nécessairement pair*). Aussi, on a en particulier $e(\xi) = 0$ *si* ξ *a un terme direct de rang impair.*

C'est le cas, par exemple, de ξ admettant une section non nulle en tout point (car cette section engendre (le démontrer !) un terme direct de rang 1). Par conséquent, *si* $e(\xi) \neq 0$, *chaque section du fibré* ξ *s'annule en un point au moins.*

Cette affirmation est à la base de la démonstration d'un nombre étonnamment grand de théorèmes géométriques élégants et ardus.

Exemple 2. En temps et lieu, on établira par un calcul direct que la classe d'Euler $e(\tau)$ est non nulle pour le fibré tangent τ sur la sphère bidimensionnelle S^2. *Il n'existe* donc *sur* S^2 *aucun champ différentiable partout non nul de vecteurs tangents.* On dit de façon imagée qu'on ne saurait polir un hérisson idéal (i.e. recouvert entièrement de piquants) ou encore que le cuir chevelu de tout être humain possède nécessairement un tourbillon. Ainsi, on donne à cette affirmation le nom de *théorème du hérisson* ou *de théorème du tourbillon.*

* * *

Les formules (4) et (5) entraînent de suite qu'on a pour tout fibré vectoriel $\xi \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$ et tout $h \geqslant 0$

$$(13) \qquad \begin{aligned} c(\xi + \theta^h) &= c(\xi) \quad \text{pour } \mathbb{K} = \mathbb{C}, \\ p(\xi + \theta^h) &= p(\xi) \quad \text{pour } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \end{aligned}$$

avec θ^h un fibré trivial de rang h.

[*On ne trouve* pour la classe d'Euler $e(\xi)$ *aucune* formule analogue à (13). Quant aux caractères de Chern et de Pontriaguine, il n'en existe que pour les composantes homogènes de degré strictement positif:

$$\mathrm{ch}_r(\xi + \theta^h) = \mathrm{ch}_r(\xi), \quad \mathrm{ph}_r(\xi + \theta^h) = \mathrm{ph}_r(\xi),$$

avec $r > 0$.]

Les formules (13) aidant, on introduit la

Définition 6. Deux fibrés vectoriels ξ et η de même base $\mathscr{X}$ sont *stablement équivalents* s'il existe des nombres h et k tels que les fibrés $\xi \oplus \theta^h$ et $\eta \oplus \theta^k$ soient isomorphes, i.e. si l'on a pour le demi-groupe $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$:

$$\xi + \theta^h = \eta + \theta^k$$

(et $\dim \xi + h$ est nécessairement égal à $\dim \eta + k$).

Il s'agit évidemment d'une relation d'équivalence au sens algébrique général.

Le corps de base $\mathbb{K}$ est en l'occurrence non seulement $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$, mais aussi le corps des quaternions $\mathbb{H}$.

Remarque 5. Quand les variétés $\mathscr{X}$ sont non connexes, la définition 6 n'est guère commode. (Cf. remarque 3.) N'empêche que nous la laissons telle quelle.

La classe de l'équivalence stable de ξ sera notée $[\xi]$, et on emploiera le symbole $\widetilde{K}_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$ pour désigner l'ensemble de toutes les classes de l'équivalence stable des $\mathbb{K}$-fibrés vectoriels sur $\mathscr{X}$. [On écrit souvent $\widetilde{K}_O\mathscr{X}$ ou $\widetilde{KO}(\mathscr{X})$ au lieu de $\widetilde{K}_{\mathbb{R}}\mathscr{X}$; $\widetilde{K}_U\mathscr{X}$ ou $\widetilde{KU}(\mathscr{X})$ au lieu

de $\widetilde{K}_{\mathbb{C}}\mathscr{X}$, et $\widetilde{K}_{Sp}\mathscr{X}$ ou $\widetilde{KSp}(\mathscr{X})$ au lieu de $\widetilde{K}_{\mathbb{H}}\mathscr{X}$. *Mise en garde*: La notation $\widetilde{K}_{\mathbb{C}}\mathscr{X}$ fait souvent place à $\widetilde{K}(\mathscr{X})$.]

Il est clair que la formule

$$[\xi] + [\eta] = [\xi \oplus \eta]$$

définit bien dans l'ensemble $\widetilde{K}_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$ une opération d'addition pour laquelle il est un monoïde abélien (demi-groupe avec élément neutre). Son élément zéro est la classe $[\theta]$ des fibrés triviaux θ^h, $h \geqslant 0$. [On indique que $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$ ne possède pas d'élément zéro!]

Remarque 6. La construction du monoïde $\widetilde{K}_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$ a un sens pour tout espace topologique $\mathscr{X}$. Puisque chaque fibré vectoriel sur une variété différentiable est isomorphe à un fibré différentiable, et deux fibrés différentiables isomorphes le sont différentiablement (voir remarques 1 et 2 de la leçon 10), cette généralisation conduit pour $\mathscr{X}$ différentiable au même monoïde $\widetilde{K}_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$.

La formule

$$f^* [\xi] = [f^* \xi]$$

définit évidemment bien pour toute application continue $f: \mathscr{X}' \to \mathscr{X}$ l'homomorphisme

$$f^*: \widetilde{K}_{\mathbb{K}}\mathscr{X} \to \widetilde{K}_{\mathbb{K}}\mathscr{X}',$$

et $(\mathrm{id})^* = \mathrm{id}$, $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ (i.e. $\widetilde{K}_{\mathbb{K}}$ est un *foncteur contravariant* à valeurs dans la catégorie des ensembles).

Chose étrange, le monoïde $\widetilde{K}_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$ n'a pas reçu de nom sonore (bien qu'il rende de grands services non seulement en géométrie, mais aussi en théorie des équations différentielles et pseudo-différentielles, pour ne citer que ce chapitre des mathématiques, et soit en algèbre à la racine d'une théorie autonome importante et de ses applications multiples). On l'appelle *$\widetilde{K}$-foncteur* tout court (ou encore *$\widetilde{K}$-groupe* s'il est un groupe) de l'espace $\mathscr{X}$ (et la théorie dont nous venons de parler est dite *K-théorie algébrique*). Bien qu'il s'agisse là des appellations fortuites vides de sens, elles sont universellement admises.

Selon les formules (13), les classes caractéristiques c et p (ainsi que ch_r et ph_r, $r > 0$) prennent même valeur sur les fibrés stablement équivalents, i.e. les égalités

$$c[\xi] = c(\xi) \quad \text{pour } \mathbb{K} = \mathbb{C},$$
$$p[\xi] = p(\xi) \quad \text{pour } \mathbb{K} = \mathbb{R}$$

définissent parfaitement les homomorphismes additifs-multiplicatifs

$$c : \tilde{K}_{\mathbb{C}}\mathscr{X} \to 1 + (H^{2*}\mathscr{X})^{+},$$

$$p : \tilde{K}_{\mathbb{R}}\mathscr{X} \to 1 + (H^{4*}\mathscr{X})^{+},$$

et les égalités

$$\mathrm{ch}_r [\xi] = \mathrm{ch}_r \xi \quad \text{pour } \mathsf{K} = \mathbb{C},$$

$$\mathrm{ph}_r [\xi] = \mathrm{ph}_r \xi \quad \text{pour } \mathsf{K} = \mathbb{R}$$

définissent les homomorphismes additifs

$$\mathrm{ch}_r : \tilde{K}_{\mathbb{C}}\mathscr{X} \to H^{2r}\mathscr{X},$$

$$\mathrm{ph}_r : \tilde{K}_{\mathbb{R}}\mathscr{X} \to H^{4r}\mathscr{X}.$$

On souligne que les dernières applications n'existent que pour $r > 0$.

* * *

Puisque les groupes sont infiniment plus faciles à étudier que les monoïdes, on voudrait savoir quand le monoïde $\tilde{K}(\mathscr{X})$ en est un. Le problème s'avère purement topologique sans aucun lien avec la structure différentiable définie sur la variété $\mathscr{X}$. Aussi, on le traite en supposant que $\mathscr{X}$ est en général un espace topologique séparé normal (voir définition 3 de la leçon III.9) quelconque, et les variétés différentiables sont des fois appelées *espaces différentiables*.

Problème 9. Démontrer que *toute variété séparée différentiable est un espace normal.*

On rappelle (cf. définition 1 de la leçon III.22) qu'une famille de fonctions $\eta_i : \mathscr{X} \to I$, $1 \leqslant i \leqslant N$ (supposée finie dans notre cas) est une *partition de l'unité* subordonnée à un recouvrement ouvert $\{U_i, 1 \leqslant i \leqslant N\}$ de l'espace $\mathscr{X}$ si $\eta_1 + \ldots + \eta_N = 1$ et $\eta_i = 0$ à l'extérieur de l'ensemble U_i pour tout $i = 1, \ldots, N$. Si $\mathscr{X}$ est différentiable, toutes les fonctions η_i sont supposées posséder cette propriété.

Problème 10. Démontrer que *pour tout recouvrement ouvert fini $\{U_i, 1 \leqslant i \leqslant N\}$ d'un espace normal $\mathscr{X}$, il existe une partition de l'unité subordonnée.* [*Indication.* Construire le recouvrement $\{V_i\}$ subordonné à $\{U_i\}$ (voir proposition 6 de la leçon III.9) et la fonction d'Urysohn φ_i du couple $(U_i, \overline{V_i})$ pour tout $i = 1, \ldots, N$ (dans le cas général, l'existence de cette fonction est garantie par un théorème d'Urysohn, et si $\mathscr{X}$ est différentiable, elle l'est par la

proposition 2 de la leçon III.14). Poser ensuite $\eta_i = \varphi_i/\varphi$, où $\varphi = \varphi_1 + \ldots + \varphi_N$.]

Définition 7. Un fibré $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{X})$ est *de type fini* si l'on recouvre $\mathscr{X}$ par un système fini d'ensembles ouverts sur chacun desquels ξ est trivialisable. L'espace $\mathscr{X}$ est *de type fini* s'il en est ainsi de tout fibré ξ sur $\mathscr{X}$.

Il est clair, par exemple, que *tout espace compact $\mathscr{X}$ est de type fini.*

Mais certains espaces (et certaines variétés) sont de type fini sans être compacts.

Problème 11. Montrer que l'espace $\mathbb{R}^n$ est de type fini. [*Indication.* Démontrer que tout fibré vectoriel sur $\mathbb{R}^n$ est trivialisable.]

Proposition 2. *Pour tout fibré vectoriel ξ de type fini sur un espace normal $\mathscr{X}$, il existe un fibré vectoriel η (différentiable si $\mathscr{X}$ et ξ le sont) tel qu'on ait*

$$[\xi] + [\eta] = 0 \tag{14}$$

dans le monoïde $\tilde{K}_{\mathbb{R}}\mathscr{X}$.

En particulier, le monoïde $\tilde{K}(\mathscr{X})$ est un groupe si $\mathscr{X}$ est de type fini.

D é m o n s t r a t i o n. Par hypothèse il existe pour $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{X})$ un atlas trivialisant fini $\{(U_i, \varphi_i), 1 \leqslant i \leqslant N\}$. Soit $\{\eta_i\}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $\{U_i\}$ (voir problème 10). On construit pour chaque $i = 1, \ldots, N$ l'application $g_i : \mathscr{E} \to \mathbb{R}^n$, $n = \dim \xi$. A cet effet, on pose pour tout point $p \in \mathscr{E}$

$$g_i(p) = \begin{cases} \eta_i(b)\mathbf{x} & \text{si } p \in \mathscr{E}_{U_i} \text{ et } \varphi_i(p) = (b, \mathbf{x}), \quad b \in \mathscr{B}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \\ 0 & \text{si } p \notin \mathscr{E}_{U_i}, \end{cases}$$

où $b = \pi(p)$. Il est clair que l'application g_i est continue (et différentiable dès que $\mathscr{X}$ et ξ le sont).

Soit g l'application $\mathscr{E} \to \mathbb{R}^{nN}$ définie par

$$g(p) = (g_1(p), \ldots, g_N(p)), \; p \in \mathscr{E}$$

[on identifie $\mathbb{R}^{nN}$ à $\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n$ (N fois)], et soit

$$\varphi : \xi \to \theta^{nN}$$

le morphisme correspondant (défini par $\varphi(p) = (\pi(p), g(p))$, $p \in \mathscr{E}$) du fibré ξ dans le fibré trivial $\theta^{nN} = (\mathscr{X} \times \mathbb{R}^{nN}, \mathrm{pr}, \mathscr{X})$.

L'application de fibres

$$\varphi_b : \mathscr{F}_b \to \mathbb{R}^{nN}$$

induite par φ n'est autre, pour tout point $b \in \mathscr{X}$, que la restriction de g à $\mathscr{F}_b$. Si $\varphi_b(p) = 0$, $p \in \mathscr{F}_b$, on a donc $g_i(p) = 0$ quels que soient $i = 1, \ldots, N$. D'autre part, $\eta_1 + \ldots + \eta_N = 1$, si bien qu'il existe un indice i_0 tel que $\eta_{i_0}(b) \neq 0$. Alors $p \in U_{i_0}$, et $\eta_{i_0}(b)\, \mathbf{x} = 0$ si $\varphi_{i_0}(p) = (b, \mathbf{x})$. Par conséquent, $\mathbf{x} = 0$, et p est donc l'élément zéro de l'espace vectoriel $\mathscr{F}_b$. Ainsi, *l'application linéaire* φ_b *est un monomorphisme pour tout* $b \in \mathscr{X}$.

Soit $\mathscr{E}'$ un sous-espace de $\mathscr{X} \times \mathbb{R}^{nN}$, formé des points $(b, \mathbf{x})$ tels que le vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{nN}$ soit orthogonal à l'image $\operatorname{Im} \varphi_b$ du monomorphisme φ_b, et soit π' la restriction à $\mathscr{E}'$ de la projection pr: $\mathscr{X} \times \mathbb{R}^{nN} \to \mathscr{X}$.

Problème 12. Montrer que *le triplet* $\eta = (\mathscr{E}', \pi', \mathscr{X})$ *est un fibré vectoriel (différentiable si tel est le cas de* $\mathscr{X}$ *et de* ξ). (La seule chose à démontrer est certes la trivialité locale.)

La somme directe $\mathscr{F}_b \oplus \mathscr{F}'_b$ des fibres de ξ et η est isomorphe par construction pour tout point $b \in \mathscr{X}$ à l'espace $\operatorname{Im} \varphi_b \oplus \mathscr{F}'_b = \mathbb{R}^{nN}$. Aussi

$$\xi \oplus \eta = \theta^{nN},$$

ce qui est équivalent à (14). □

Corollaire 1. *Le monoïde* $\tilde{K}(\mathscr{X})$ *est un groupe pour toute variété séparée compacte* $\mathscr{X}$. □

LEÇON 24

K-foncteur. — $\tilde{K}$-foncteur et K-foncteur. — Opérations λ^k. — Opérations d'Adams. — Groupes $K_{\mathbb{C}}S^n$. — Invariant de Hopf. — Construction de Hopf. — Certaines implications élémentaires. — Un théorème d'équivalence.

Un autre procédé d'obtention du groupe $\tilde{K}(\mathscr{X})$ (qui est plus commode sous certains rapports) s'inspire de la construction algébrique générale du groupe de différences.

Quel que soit le demi-groupe abélien M, le *groupe de différences* GM a pour éléments les différences formelles $a - b$, où a, $b \in M$, et deux différences $a - b$ et $a_1 - b_1$ sont égales si et seulement s'il existe $c \in M$ tel que $a + b_1 + c = a_1 + b + c$. L'addition dans G$M$ est évidemment définie par

$$(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d).$$

Problème 1. Vérifier qu'on aboutit effectivement à un groupe.
[*Question.* Quel est le rôle de l'élément c?]
Le groupe de différences est souvent appelé *groupe de Grothendieck*, du nom du mathématicien qui en a largement utilisé la construction et en a fait l'objet de l'attention générale. (En algèbre générale, cette construction a été d'ailleurs connue bien avant Grothendieck; il suffit de dire que c'est la façon dont on déduit l'ensemble des entiers à partir de celui des entiers naturels.)

La formule

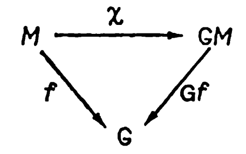
$$\chi: a \mapsto (a + c) - c, \quad c \in M \text{ quelconque},$$

définit bien une application

$$\chi: M \to \mathrm{G}M.$$

Par définition, $\chi(a) = \chi(b)$ si et seulement si M contient un élément c tel que $a + c = b + c$.

Problème 2. Montrer qu'il existe pour tout homomorphisme f: $M \to$ G du demi-groupe M dans G un homomorphisme Gf: G$M \to$ G unique, qui clôt le diagramme commutatif



Le groupe de différences du demi-groupe $\text{Vect}_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$ est noté $K_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$ (les variantes $K_O\mathscr{X}$, $K_U\mathscr{X}$, . . . sont les mêmes que pour le monoïde $\widetilde{K}_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$).

On conçoit que $K_{\mathbb{K}}$ est naturellement un foncteur contravariant: quelle que soit l'application continue $f\colon \mathscr{X}' \to \mathscr{X}$, la formule

$$f^*(\xi - \eta) = f^*\xi - f^*\eta$$

définit parfaitement l'homomorphisme

$$f^*\colon K_{\mathbb{K}}\mathscr{X} \to K_{\mathbb{K}}\mathscr{X}'$$

qui jouit des propriétés fonctorielles standard.

Problème 3. Montrer que *quand* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$,

a) *l'opération de multiplication tensorielle est transportée dans le groupe* $K_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$;

b) $K_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$ *est un anneau pour cette opération.*

L'anneau $K_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$ possède évidemment l'unité: $1 = \chi(\theta^1)$.

Les homomorphismes c, ch, p, ph prenant leurs valeurs dans les groupes sont prolongeables de façon unique (problème 1) en les homomorphismes

$$c, \text{ch}\colon K_{\mathbb{C}}\mathscr{X} \to H^{2*}\mathscr{X} \quad \text{pour } \mathbb{K} = \mathbb{C},$$

$$p, \text{ph}\colon K_{\mathbb{R}}\mathscr{X} \to H^{4*}\mathscr{X} \quad \text{pour } \mathbb{K} = \mathbb{R}.$$

Ce sont ch et ph qui méritent une mention spéciale. En effet, les formules (11) de la leçon 23 (que nous n'avons pas démontrées!) *en font des homomorphismes d'anneaux.*

Remarque 1. Puisque les groupes $H^{2*}\mathscr{X}$ et $H^{4*}\mathscr{X}$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, ch et ph induisent les homomorphismes d'algèbres

$$\text{ch}^{\mathbb{R}}\colon K_{\mathbb{C}}\mathscr{X} \otimes \mathbb{R} \to H^{2*}\mathscr{X},$$

$$\text{ph}^{\mathbb{R}}\colon K_{\mathbb{R}}\mathscr{X} \otimes \mathbb{R} \to H^{4*}\mathscr{X}.$$

On montre (mais le théorème est ardu) qu'*il s'agit des isomorphismes.*

Ce théorème est justement la raison d'être principale des homomorphismes ch et ph.

* * *

On établit facilement que *quels que soient les fibrés vectoriels stablement équivalents* ξ *et* η, *dans le groupe* $K_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$

$$\xi - \theta^n = \eta - \theta^m,$$

où $n = \dim \xi$, $m = \dim \eta$.

En effet, on trouve par hypothèse des nombres h et k tels que $\xi + \theta^h = \eta + \theta^k$ dans $\mathrm{Vect}_K \mathscr{X}$. Aussi

$$\xi - \theta^n = (\xi + \theta^h) - \theta^{n+h} = (\eta + \theta^k) - \theta^{n+h} = \eta - \theta^m$$

dans $K_K \mathscr{X}$ (on rappelle que $n + h = m + k$ et $\theta^{n+h} = \theta^n \oplus \theta^h$). □

Par conséquent, la formule $[\xi] \mapsto \xi - \theta^n$, avec $n = \dim \xi$, définit parfaitement une application

$$(1) \qquad \widetilde{K}_K \mathscr{X} \to K_K \mathscr{X}$$

qui est évidemment un homomorphisme.

On vérifie sans peine que *l'homomorphisme* (1) *a son noyau trivial.* En effet, si $\xi - \theta^n = 0$ dans $K_K \mathscr{X}$, alors $\xi \oplus \eta = \theta^n \oplus \eta$ dans $\mathrm{Vect}_K \mathscr{X}$ pour tout fibré η. En particulier, $\xi \oplus \theta^1 = \theta^{n-1}$ si $\eta = \theta^1$, i.e. $[\xi] = [\theta]$). □

Si le monoïde $\widetilde{K}_K \mathscr{X}$ est un groupe (l'espace $\mathscr{X}$ est, par exemple, séparé, normal et de type fini), *l'homomorphisme* (1) *est donc un monomorphisme.*

L'image de (1) est formée par construction de tous les éléments $\xi - \theta^n$, $n = \dim \xi$, et elle est contenue par conséquent dans le noyau de l'homomorphisme

$$(2) \qquad \dim : K_K \mathscr{X} \to \mathbb{Z}$$

donné (évidemment bien) par

$$\dim (\xi - \eta) = \dim \xi - \dim \eta.$$

Il se trouve que *si le monoïde $\widetilde{K}_K \mathscr{X}$ est un groupe, l'homomorphisme* (1) *est un isomorphisme sur le noyau de* (2). En effet, soit $\dim (\xi - \eta) = 0$, i.e. $\dim \xi = \dim \eta$. $\widetilde{K}_K \mathscr{X}$ est un groupe, si bien qu'il existe pour ξ et η des fibrés ξ' et η' et des nombres h et k tels que $\xi \oplus \xi' = \theta^h$ et $\eta \oplus \eta' = \theta^k$. Considérons le fibré $\zeta = \xi \oplus \eta'$. Son rang est $\dim \xi + (k - \dim \eta) = k$, et

$$\xi - \eta = (\xi + \eta') - (\eta + \eta') = \zeta - \theta^h$$

dans le groupe $K_K \mathscr{X}$. □

Les éléments du groupe $K_K \mathscr{X}$ s'appellent *fibrés virtuels*, et la valeur de l'homomorphisme (2) sur un fibré vectoriel virtuel est le *rang* (ou la *dimension*) de ce dernier. Ainsi, *sur les espaces séparés normaux de type fini, les classes des fibrés vectoriels stablement équivalents s'identifient naturellement aux fibrés virtuels de rang* (*dimension*) 0.

S'agissant de ces espaces, on définit donc le groupe $\widetilde{K}_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$ en tant que le noyau de l'homomorphisme (2).

Les fibrés virtuels de la forme $\chi(\xi)$ sont dits *positifs*. On les désigne d'ordinaire par ξ. (Mais le fibré $\chi(\theta^n)$ est noté n.)

Avec ces notations, l'application

$$\widetilde{K}_{\mathbb{K}}\mathscr{X} \to K_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$$

est donc donnée par

$$[\xi] \mapsto \xi - \dim \xi.$$

On identifie de règle $[\xi]$ à $\xi - \dim \xi$.

Remarque 2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), (2) constitue évidemment un homomorphisme d'anneaux (car $\dim(\xi \otimes \eta) = \dim \xi \dim \eta$). Aussi, son noyau est-il un idéal de l'anneau $K_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$ et, en particulier, un anneau. *Si le monoïde $\widetilde{K}_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$ est un groupe, la formule*

$$[\xi][\eta] = [\xi \otimes \eta] - m[\xi] - n[\eta], \quad n = \dim \xi, \quad m = \dim \eta,$$

définit donc dans $\widetilde{K}_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$, groupe pour l'addition, la multiplication pour laquelle $\widetilde{K}_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$ est un anneau.

Algébriquement, l'anneau $K_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$ s'obtient à partir de $\widetilde{K}_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$ par l'adjonction formelle de l'unité.

* * *

L'anneau $K_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$ est muni d'une structure algébrique supplémentaire remarquable.

On rappelle (voir problème 11 de la leçon 12) que pour tout $\mathbb{K}$-fibré vectoriel ξ sur $\mathscr{X}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et tout entier $k \geqslant 0$, on définit le $\mathbb{K}$-fibré vectoriel $\Lambda^k\xi$. (Si $k = 0$, on estime par convention que $\Lambda^0\xi = \theta^1$.)

Proposition 1. *Il existe des applications*

$$\lambda^k : K_{\mathbb{K}}\mathscr{X} \to K_{\mathbb{K}}\mathscr{X}, \quad k \geqslant 0,$$

telles que

a) *on ait*

$$\lambda^k(x+y) = \sum_{i+j=k} \lambda^i(x)\lambda^j(y)$$

pour tout x et tout y de $K_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$;

b) *si $x = \chi(\xi)$, alors*

$$\lambda^k(x) = \chi(\Lambda^k\xi).$$

Ces propriétés caractérisent les applications λ^k de façon unique.

Démonstration. Soit $1 + (K_{\mathbb{K}}\mathscr{X})\,[[t]]^+$ le groupe multiplicatif de toutes les séries formelles de terme libre 1 sur l'anneau $K_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$.

Soit l'application

$$\Lambda_t : \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}\mathscr{X} \to 1 + (K_{\mathbb{K}}\mathscr{X})\,[[t]]^+$$

définie par

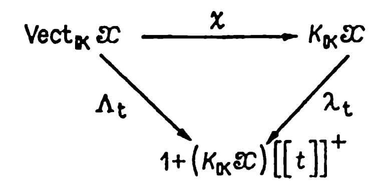
$$\Lambda_t\xi = \sum_{k=0}^{\infty} \chi\,[\Lambda^k\xi]\,t^k.$$

Problème 4. Démontrer que Λ_t *est un homomorphisme.* [*Indication.* Quels que soient les espaces vectoriels $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$, l'espace vectoriel $\Lambda^k(\mathscr{V} \oplus \mathscr{W})$ est canoniquement isomorphe à la somme directe $\Lambda^i\mathscr{V} \oplus \Lambda^j\mathscr{W}$ par rapport à tous les $i \geqslant 0$, $j \geqslant 0$, $i + j = k$.]

Il existe donc (voir problème 2) l'homomorphisme

$$\lambda_t : K_{\mathbb{K}}\mathscr{X} \to 1 + (K_{\mathbb{K}}\mathscr{X})\,[[t]]^+$$

unique qui clôt le diagramme commutatif



Soit

$$\lambda_t(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k(x)\,t^k, \quad x \in K_{\mathbb{K}}\mathscr{X},$$

auquel cas $\lambda^k : x \mapsto \lambda^k(x)$ sont les applications

$$K_{\mathbb{K}}\mathscr{X} \to K_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$$

vérifiant la condition b).

Dire que λ_t est un homomorphisme, c'est dire que

$$\lambda_t(x + y) = \lambda_t(x)\,\lambda_t(y)$$

pour tout x et tout y de $K_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$. Si l'on ouvre les parenthèses, on constate de suite que l'identité obtenue est équivalente à la condition a).

Ainsi, la proposition 1 se trouve démontrée. □

Il est clair que *les applications* λ^k *sont fonctorielles*, i.e. on a pour toute application continue $f\colon \mathscr{Y} \to \mathscr{X}$ le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} K_{\mathsf{K}}\mathscr{X} & \xrightarrow{\lambda^k} & K_{\mathsf{K}}\mathscr{X} \\ {\scriptstyle f^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^*} \\ K_{\mathsf{K}}\mathscr{Y} & \xrightarrow{\lambda^k} & K_{\mathsf{K}}\mathscr{Y}. \end{array}$$

On a certainement $\lambda^1(x) = x$ pour tout $x \in K_{\mathsf{K}}\mathscr{X}$ (i.e. $\lambda^1 = \mathrm{id}$).

Nous donnerons plus loin (voir problème 7) une formule explicite pour $\lambda^k x$, $x = \xi - \eta$, qui exprime le fibré virtuel $\lambda^k x$ par les fibrés ξ et η.

* * *

La série $\lambda_t(x)$ étant inversible, on définit la série

$$\psi_t(x) = -t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\lambda_{-t}(x) = -t\,\frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda_{-t}(x)}{\lambda_{-t}(x)}$$

dont le terme constant est nul, i.e. $\psi_t(x)$ s'écrit $\psi^1(x)\,t + \ldots$ $\ldots + \psi^k(x)\,t^k + \ldots$ Les applications

$$\psi^k : K_{\mathsf{K}}\mathscr{X} \to K_{\mathsf{K}}\mathscr{X}$$

s'appellent *opérations d'Adams*.

Problème 5. Démontrer qu'on a pour tout $n \geqslant k$

$$\psi^k(x) = s_k(\lambda^1(x), \ldots, \lambda^n(x)),$$

avec $s_k(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ les polynômes de Newton qui expriment le polynôme symétrique $x_1^k + \ldots + x_n^k$ moyennant les polynômes symétriques élémentaires $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$. En particulier (voir formules de Waring, leçon 23),

$$\psi^1(x) = \lambda^1(x) = x,$$
$$\psi^2(x) = \lambda^1(x)^2 - 2\lambda^2(x) = x^2 - 2\lambda^2(x),$$
$$\psi^3(x) = x^3 + 3\lambda^3(x) - 3x\lambda^2(x), \quad \text{et ainsi de suite.}$$

[*Indication.* Soit $f(t) = (1 + x_1 t) \ldots (1 + x_n t)$. On a

$$t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln f(t) = \frac{tx_1}{1+x_1 t} + \ldots + \frac{tx_n}{1+x_1 t} = \sum_{k=1}^{\infty}(x_1^k + \ldots + x_n^k)(-t)^k.]$$

L'avantage des opérations ψ^k comparées à λ^k tient à ce que ψ^k *est pour tout* $k \geqslant 1$ *un homomorphisme d'anneaux*, i.e. on a pour tout x et tout y de $K_{\mathsf{K}}\mathscr{X}$

$$\psi^k(x + y) = \psi^k(x) + \psi^k(y), \tag{3}$$

$$\psi^k(xy) = \psi^k(x)\,\psi^k(y). \tag{4}$$

La formule (3) étant équivalente à l'identité $\psi_t(x+y) = \psi_t(x) + \psi_t(y)$ est établie facilement:

$$\psi_t(x+y) = -t\frac{d}{dt}\ln \lambda_{-t}(x+y) = -t\frac{d}{dt}\ln(\lambda_{-t}(x)\lambda_{-t}(y)) =$$

$$= -t\frac{d}{dt}[\ln \lambda_{-t}(x) + \ln \lambda_{-t}(x)] = \psi_t(t) + \psi_t(y).$$

Il en va autrement pour (4) qui traduit un résultat géométrique lourd de sens. Sa démonstration s'inspire du

Principe de scission. *Pour tout K-fibré vectoriel* $\xi = (\mathscr{E}, \pi, \mathscr{X})$, *il existe un espace* $\mathscr{Y}$ *et une application continue* $f: \mathscr{Y} \to \mathscr{X}$ *pour lesquels*

a) *l'application* $f^*: K_K\mathscr{X} \to K_K\mathscr{Y}$ *est un monomorphisme*;

b) *le fibré* $f^*\xi$ *sur* $\mathscr{Y}$ *est une somme de fibrés linéaires* (*i.e. leur rang est* 1).

Pour que ce principe soit juste, la base $\mathscr{X}$ de ξ doit remplir certaines conditions. Il suffit, par exemple, que $\mathscr{X}$ soit séparé et paracompact (en particulier, compact). Ce faisant, l'espace $\mathscr{Y}$ peut appartenir à la classe des espaces séparés paracompacts (resp. compacts). Nous passons sur la démonstration du principe énoncé.

Problème 6. Construire le fibré $P\xi = (\mathscr{E}', \pi', \mathscr{X})$ dont la fibre au-dessus de $b \in \mathscr{X}$ est l'espace projectif $P(\mathscr{F}_b^\xi)$ sur l'espace vectoriel $\mathscr{F}_b^\xi$ (les points de $P(\mathscr{F}_b^\xi)$ sont les sous-espaces de dimension 1 de $\mathscr{F}_b^\xi$). Soit $(\pi')^*\xi$ l'image réciproque sur $\mathscr{E}'$ du fibré vectoriel ξ. Montrer que *le fibré* $(\pi')^*\xi$ *est somme directe d'un fibré linéaire et d'un fibré de rang* $n-1$. [*Indication.* Les points de l'espace total du fibré de rang 1 sont les couples (L, p), où $L \in \mathscr{E}'$ et $p \in L$.]

Avec ce résultat, on effectue un pas de récurrence dans la démonstration du principe de scission.

Celui-ci et la formule (3) entraînent qu'il suffit de vérifier (4) pour x et y des fibrés linéaires. D'autre part, *si* x *l'est, alors*

(5) $$\psi^k(x) = x^k$$

(on l'établit aisément). [En effet, si x est de rang 1, alors $\lambda^i(x) = 0$, $i \geqslant 2$, donc $\lambda_t(x) = 1 + tx$. Aussi,

$$\psi_t(x) = -t\frac{d}{dt}\ln(1-tx) = \frac{tx}{1-tx} = \sum_{k=1}^{\infty} x^k t^k,$$

égalité équivalente à (5).] Par conséquent, on a pour x et y linéaires

$$\psi^k(xy) = (xy)^k = x^k y^k = \psi^k(x)\psi^k(y)$$

(on note que le fibré xy est linéaire avec x et y), ce qui prouve (4). □

On démontre de façon analogue l'égalité

$$\psi^k\psi^l(x) = \psi^{kl}(x).$$

(Si x est linéaire, il suffit d'utiliser la formule (5). Le cas général s'ensuit en vertu du principe de scission.) Cela signifie que

$$\psi^k \circ \psi^l = \psi^{kl} \tag{6}$$

quels que soient k, $l \geqslant 1$.

Remarque 3. Si $\mathscr{X}$ est différentiable, l'espace $\mathscr{Y}$ et l'application f du principe de scission sont supposés différentiables eux aussi. On définit l'homomorphisme $f^*: H^*\mathscr{X} \to H^*\mathscr{Y}$ *qui est un monomorphisme.*

Cela donne de suite (voir problème 3 de la leçon 23) les formules (11) de la leçon précédente (i.e. les applications ch et ph sont des homomorphismes pour la multiplication).

Problème 7. Dans le cas des espaces vectoriels (donc des fibrés vectoriels), on considère, en plus de Λ^k, $k \geqslant 0$, le foncteur S^k qui fait correspondre à l'espace $\mathscr{V}^0$ l'espace vectoriel $S^k\mathscr{V}^0$ de tous les tenseurs *symétriques* d'ordre k sur $\mathscr{V}^0$. Démontrer pour S^k l'analogue de la proposition 1, i.e. construire les applications

$$s^k : K_{\mathbb{K}}\mathscr{X} \to K_{\mathbb{K}}\mathscr{X}, \quad k \geqslant 0,$$

pour lesquelles $s^k(x) = \chi(S^k\xi)$ si $x = \chi(\xi)$, et

$$s^k(x+y) = \sum_{i+j=k} s^i(x)\, s^j(y)$$

quels que soient x, $y \in K_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$.

Démontrer également qu'on a dans l'anneau $K_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$ pour les fibrés vectoriels ξ et η quelconques:

$$\lambda^k(\xi - \eta) = \sum_{i+j=k} (-1)^i \lambda^i(\xi)\, s^j(\eta).$$

[*Indication.* Utiliser le principe de scission.]

* * *

Les groupes $K_{\mathbb{K}}\mathscr{X}$, avec $\mathscr{X} = S^n$, offrent un intérêt particulier. Nous nous placerons dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ [le groupe $O(n)$ étant non connexe, les difficultés techniques sont un peu plus nombreuses pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$], et nous utiliserons à cet effet l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^n$.

Les points de $\mathbb{C}P^n$ sont par définition les sous-espaces de dimension 1 de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^{n+1}$. Soit $\mathscr{E}$ un sous-espace du produit direct $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}P^n$, dont les éléments sont les couples (z, L), $z \in \mathbb{C}^{n+1}$, $L \in \mathbb{C}P^n$, tels que $z \in L$, et soit $\pi: \mathscr{E} \to \mathbb{C}P^n$ la restriction à $\mathscr{E}$ de la projection $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n$.

Problème 8. Montrer que *le triplet* $\eta_{n+1} = (\mathscr{E}, \pi, \mathbb{C}P^n)$ *est un fibré vectoriel de rang* 1.

La fibre de η_{n+1} au-dessus du point $L \in \mathbb{C}P^n$ est évidemment l'espace L lui-même, ce qui explique le nom de *fibré tautologique* qu'on donne à η_{n+1}.

Si $n = 1$, l'espace $\mathbb{C}P^1$ n'est autre que la sphère de Riemann $\mathbb{C}^+$, si bien qu'il s'identifie donc naturellement à la sphère S^2. Aussi, le fibré η_2 est un fibré complexe linéaire au-dessus de S^2, et il définit par conséquent l'élément $\beta_2 = [\eta_2]$ du groupe $K_{\mathbb{C}}S^2$.

On montre (mais difficilement !) que $K_{\mathbb{C}}S^2$ *est un groupe cyclique infini de générateur* β_2. (Voir leçon 27.)

L'élément β_2 considéré comme appartenant à l'anneau $K_{\mathbb{C}}S^2$ est donné par

$$\beta_2 = \eta_2 - 1.$$

On suppose que $n = 2m$ et on identifie chaque point $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in I^n$ au point $(\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_m)$ du produit $\underbrace{I^2 \times \ldots \times I^2}_{m \text{ fois}}$, où $\mathbf{t}_i = (t_{2i-1}, t_{2i})$, $i = 1, \ldots, m$. Il est clair que le point $\mathbf{t}$ du cube I^n est sur sa frontière $\dot{I}^n$ si et seulement si $\mathbf{t}_i$ appartient pour au moins un i à la frontière du carré I^2. Il existe donc l'application continue

$$f : \underbrace{S^2 \times \ldots \times S^2}_{m \text{ fois}} \to S^{2m},$$

dernière ligne du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} I^2 \times \ldots \times I^2 & = & I^{2m} \\ {\scriptstyle \underbrace{\chi_2 \times \ldots \times \chi_2}_{m \text{ fois}}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \chi_{2m}} \\ S^2 \times \ldots \times S^2 & \to & S^{2m}, \end{array}$$

avec χ_n l'application $I^n \to S^n$ qui applique homéomorphiquement l'intérieur de I^n sur la sphère épointée $S^n \setminus \{s_0\}$ et la frontière $\dot{I}^n$ en le point s_0.

Soit $\mathrm{pr}_i : S^2 \times \ldots \times S^2 \to S^n$ la projection sur le i-ième facteur, $i = 1, \ldots, m$, et soit

$$\beta_n' = \mathrm{pr}_1^* \beta_2 \cdot \ldots \cdot \mathrm{pr}_m^* \beta_2 \in \tilde{K}_{\mathbb{C}}(S^2 \times \ldots \times S^2).$$

(Il s'agit certainement de la multiplication décrite dans la remarque 2.) On a les résultats suivants (qu'il est malheureusement impossible de vérifier) :

a. *L'homomorphisme*

$$f^* : \tilde{K}_{\mathbb{C}}S^{2m} \to \tilde{K}_{\mathbb{C}}(S^2 \times \ldots \times S^2)$$

est un monomorphisme.

b. *L'élément* β'_n *appartient à l'image de* f^* (si bien qu'il existe un élément β_n défini univoquement de $\widetilde{K}_{\mathbf{C}}S^{2m}$ tel que $f^*(\beta_n) = \beta'_n$).

c. *L'élément* β_n *est d'ordre infini. Il engendre le groupe* $K_{\mathbf{C}}S^{2m}$.

Ainsi, $K_{\mathbf{C}}S^{2m}$ *est un groupe cyclique infini pour tout* $m \geqslant 1$.

[On montre que $K_{\mathbf{C}}S^{2m+1} = 0$.]

Problème 9. Démontrer l'égalité $\beta_2^2 = 0$. [*Indication.* Utiliser la formule matricielle

$$\begin{Vmatrix} 0 & -a \\ a^{-1} & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} ab & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \tag{8}$$

et démontrer que $\eta_2 \oplus \eta_2 = \eta_2 \otimes \eta_2 \oplus \theta^1$.]

Il en résulte que $\beta_n^2 = 0$ pour tout $n \geqslant 2$.

Le fibré η_2 est de rang 1, si bien qu'on a dans l'anneau $K_{\mathbf{C}}S^2 = 1 + \widetilde{K}_{\mathbf{C}}S^2$ pour tout $k \geqslant 1$:

$$\psi^k\beta_2 = \psi^k(\eta_2 - 1) = \eta_2^k - 1.$$

Mais $\eta_2 = 1 + \beta_2$ et $\beta_2^2 = 0$, donc $\eta^2 = 1 + k\beta_2$ et, partant,

$$\psi^k\beta_2 = k\beta_2.$$

Par conséquent,

$$\psi^k\beta'_n = \mathrm{pr}_1^*(\psi^k\beta_2) \cdot \ldots \cdot \mathrm{pr}_m^*(\psi^k\beta_2) = k^m(\mathrm{pr}_1^*\beta_2 \cdot \ldots \cdot \mathrm{pr}_m^*\beta_2) = k^m\beta'_n$$

vu la propriété de fonctorialité, et

$$\psi_k\beta_n = k^m\beta_n, \quad k \geqslant 1, \ n = 2m \tag{9}$$

(on recourt de nouveau à la fonctorialité de l'opération ψ^k et à l'affirmation a).

* * *

Ces résultats relatifs aux groupes $K_{\mathbf{C}}S^n$ trouvent une application absolument remarquable dans l'ensemble de problèmes soulevés dans la leçon 8.

Soit

$$f: S^{2n-1} \to S^n$$

une application continue quelconque de la sphère S^{2n-1} dans la sphère S^n. On l'utilise pour munir la réunion disjointe $E^{2n} \sqcup S^n$ de la boule E^{2n} et de la sphère S^n de la relation d'équivalence suivante: deux points x et y sont équivalents si et seulement si ou bien x = y, ou bien $x \in S^{2n-1}$, $y \in S^n$, $f(x) = y$. On note $C(f)$ l'espace quotient correspondant. Il contient un sous-espace homéo-

morphe à S^n, dont le supplémentaire l'est à la boule ouverte $\mathring{B}^{2n}$. [On dit que $C(f)$ est le résultat du *recollement* par f de B^{2n} à S^n.]

Quels que soient l'espace $\mathscr{X}$ et son sous-espace $\mathscr{A}$, on désigne par $\mathscr{X}/\mathscr{A}$ l'espace quotient de $\mathscr{X}$ par la relation d'équivalence suivante: deux points de $\mathscr{X}$ sont équivalents si et seulement si ou bien ils se confondent, ou bien ils appartiennent à $\mathscr{A}$.

Problème 10. Montrer que $\mathscr{X}/\mathscr{A}$ est obtenu par recollement de l'espace $\mathscr{X}$ au point pt par l'application $\mathscr{A} \to$ pt.

En particulier, on définit pour $C(f)$ l'espace $C(f)/S^n$.

Problème 11. Montrer que *$C(f)$ est canoniquement isomorphe à la sphère* S^{2n}.

Ainsi, on a deux applications

$$S^n \xrightarrow{i} C(f) \xrightarrow{j} S^{2n},$$

i étant une injection et j une application de passage au quotient. Il se trouve que *la suite de groupes et d'homomorphismes*

$$0 \to \widetilde{K}_{\mathbf{C}} S^{2n} \xrightarrow{j^*} \widetilde{K}_{\mathbf{C}} C(f) \xrightarrow{i^*} \widetilde{K}_{\mathbf{C}} S^n \to 0$$

est exacte. Cette fois encore, on se passe de la démonstration.

Cette affirmation entraîne que *si $n = 2m$, $\widetilde{K}_{\mathbf{C}} C(f)$ est un groupe abélien libre de générateurs a et b, où*

$$a = j^*(\beta_{2n}), \quad i^*(b) = \beta_n$$

(a est défini de façon unique et b l'est à un terme ka près).

Cela étant, $i^*(b^2) = \beta_n^2 = 0$ implique l'existence d'un nombre $H(f)$ tel que

$$b^2 = H(f)\, a.$$

C'est l'*invariant de Hopf* de l'application f. [Le nombre $H(f)$ dépend de la classe d'homotopie de f seule, d'où son nom. Nous n'aurons pas besoin de ce fait.]

L'application j^* est monomorphe, si bien que $a^2 = 0$. Comme $i^*(a) = 0$, donc $i^*(ab) = 0$, on a $ab = \varepsilon a$, ε étant un nombre. (Le nombre ε est en fait égal à 0, mais cette précision est inutile.) Aussi

$$(b + ka)^2 = b^2 + 2k\varepsilon a = (H(f) + 2k\varepsilon)\, a.$$

On voit que si b change, $H(f)$ varie d'un nombre pair (si bien que seul son résidu modulo 2 est l'invariant). [Mais comme $\varepsilon = 0$, c'est bien $H(f)$ qui reste invariant.]

Théorème 1. *L'application f avec invariant de Hopf $H(f)$ impair n'existe que pour $n = 2, 4, 8$.*

Toujours ces valeurs mystérieuses!

Démonstration. On suppose que f avec $H(f)$ impair existe. Soient $C(f)$ l'espace correspondant, et a et b deux générateurs du groupe $K_{\mathbb{C}}C(f)$. Puisque $\psi^k(\beta_n) = k^m\beta_n$ et $\psi^k(\beta_{2n}) = k^n\beta_{2n}$, on a

$$\psi^k(a) = k^n a \text{ et } \psi^k(b) = q(k)\,a + k^m b, \quad n = 2m,$$

avec $q(k)$ un entier. En particulier, $\psi^2(b) = q(2)\,a + 2^m b$. Or,

$$\psi^2(b) = b^2 - 2\lambda^2(b) = H(f)\,a - 2\lambda^2(b)$$

(voir problème 5), donc $\psi^2(b) \equiv a \bmod 2$. Aussi, $q(2)$ est impair

D'autre part,

$$\psi^2\psi^k(b) = \psi^2(q(k)\,a + k^m b) =$$
$$= (2^n q(k) + k^m q(2))\,a + 2^m k^m b \equiv k^m q(2)\,a \bmod 2^m$$

et

$$\psi^k\psi^2(b) = \psi^k(q(2)\,a + 2^m b) =$$
$$= k^n q(2)\,a + 2^m\psi^k(b) \equiv k^n q(2)\,a \bmod 2^m.$$

Cela prouve (puisque $\psi^2 \circ \psi^k = \psi^k \circ \psi^2$; voir (6)) que

$$k^m q(2) \equiv k^n\, q(2) \mod 2^m$$

et que

$$k^m(k^m - 1) \equiv 0 \bmod 2^m$$

pour tout $k \geqslant 1$ (en effet, $q(2)$ est impair et $n = 2m$).

En particulier, on a pour tout k impair la congruence

$$(10) \qquad k^m - 1 \equiv 0 \bmod 2^m.$$

Il en résulte pour $k = 5$ et $m > 1$ que $5^m \equiv 1 \bmod 4$, résultat possible pour $m = 2l$ pair seul. Mais dans ce cas

$$k^m = (1 + 2^l)^{2l} \equiv (1 + 2^{l+1})^l \equiv 1 + l2^{l+1} \bmod 2^m,$$

$k = 1 + 2^l$, et la congruence (10) n'a donc lieu que si $l2^{l+1} \equiv 0 \bmod 2^m$, i.e. si $2l \equiv 0 \bmod 2^l$. Comme la dernière congruence n'est juste que pour $l = 1$ et 2, cela prouve que $m = 1$, 2 ou 4, i.e. $n = 2$, 4 ou 8. □

* * *

Afin d'appliquer le théorème 1 aux problèmes de la leçon 8, on construit l'application

$$(11) \qquad c_\mu : S^{2n-1} \to S^n, \quad n = 2m,$$

à partir d'une multiplication continue quelconque

$$\mu : S^{n-1} \times S^{n-1} \to S^{n-1}$$

(sans unité en général) sur la sphère S^{n-1}. On procède comme suit. On suppose que S^{2n-1} est la sphère unité de l'espace unitaire $\mathbb{C}^n$ et que $\mathbb{C}^n$ est décomposé en somme directe $\mathbb{C}^m \oplus \mathbb{C}^m$ de deux espaces $\mathbb{C}^m$. Les points de S^{2n-1} s'écrivent donc comme (u, v), $u, v \in \mathbb{C}^m$ et

$$|u|^2 + |v|^2 = 1.$$

On décompose maintenant la sphère S^{2n-1} en réunion $H^{(-)} \cup H^{(+)}$ de deux ensembles, où $H^{(+)}$ est une partie de S^{2n-1} formée des points (u, v) tels que $|u| \geqslant |v|$, et $H^{(-)}$ a pour éléments les points (u, v) tels que $|u| \leqslant |v|$.

Problème 12. Montrer que les formules

$$\varphi^{(+)}(u, v) = \left(\frac{u}{\sqrt{1-|v|^2}}, \sqrt{2}v\right), \quad (u, v) \in H^{(+)},$$

$$\varphi^{(-)}(u, v) = \left(\sqrt{2}u, \frac{v}{\sqrt{1-|u|^2}}\right), \quad (u, v) \in H^{(-)},$$

donnent les homéomorphismes

$$\varphi^{(+)} : H^{(+)} \to S^{n-1} \times B^n, \quad \varphi^{(-)} : H^{(-)} \to B^n \times S^{n-1},$$

où, comme toujours, $S^{n-1} = \{z \in \mathbb{C}^m;\ |z| = 1\}$, $B^n = \{z \in \mathbb{C}^m;\ |z| \leqslant 1\}$.

Les homéomorphismes $\varphi^{(+)}$ et $\varphi^{(-)}$ coïncident sur l'intersection $H^{(0)} = H^{(-)} \cap H^{(+)}$ $\left(\text{caractérisée par les équations } |u| = |v| = \frac{1}{2}\right)$ pour donner l'homéomorphisme

$$\varphi^{(0)} : H^{(0)} \to S^{n-1} \times S^{n-1}, \quad (u, v) \mapsto (\sqrt{2}u, \sqrt{2}v).$$

Soit, par exemple, $m = 1$. Le sous-ensemble $H^{(0)}$ est homéomorphe au tore $S^1 \times S^1$, et $H^{(-)}$ et $H^{(+)}$ sont des tores pleins à bord $H^{(0)}$.

Chaque point y de la sphère S^n (dans l'espace $\mathbb{R}^{n+1}$ de base $e_0, \ldots, e_n$) s'écrit comme

$$y = \cos\theta \cdot x + \sin\theta \cdot e_n,$$

où $x \in S^{n-1}$ et $-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$. Lorsque $-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant 0$, y sera noté $[x, t]^{(-)}$, $t = 1 + \frac{2}{\pi}\theta$, et si $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, on emploiera le symbole $[x, t]^{(+)}$, $t = 1 - \frac{2}{\pi}\theta$ (dans les deux cas, t varie de 0 à 1, et si $t = 1$, on obtient le point x, tandis qu'on a les points $-e_n$ et e_n pour $t = 0$).

Avec ces notations, on définit l'application c_μ par les formules

$$c_\mu(u, v) = \begin{cases} \left[\mu\left(\frac{u}{|u|}, \frac{v}{|v|}\right), \sqrt{2}\,|v|\right]^{(+)} & \text{si} \quad (u, v) \in H^{(+)}, \\ \left[\mu\left(\frac{u}{|u|}, \frac{v}{|v|}\right), \sqrt{2}\,|u|\right]^{(-)} & \text{si} \quad (u, v) \in H^{(-)}. \end{cases}$$

On établit facilement qu'elles définissent parfaitement (même pour $u = 0$ et $v = 0$) l'application continue (11). □

On dit que c_μ est obtenue à partir de la multiplication μ par la *construction de Hopf*.

Soit s_0 un point de la sphère S^{n-1}. Fixons-le et considérons les applications

$$x \mapsto \mu(s_0, x), \quad x \mapsto \mu(x, s_0) \tag{12}$$

de S^{n-1} dans elle-même. Soient d_1 et d_2 les degrés de ces applications. [*Question*. Dépendent-ils du choix de s_0 ?]

c_μ étant l'application $S^{2n-1} \to S^n$, n pair, possède l'invariant de Hopf $H(c_\mu)$. On a

$$H(c_\mu) = d_1 d_2. \tag{13}$$

Nous en omettons également la démonstration.

Si la multiplication μ a l'unité s_0, les applications (12) sont les identités, si bien que $d_1 = 1$, $d_2 = 1$. Alors $H(c_\mu) = 1$, ce qui n'est possible par le théorème 1 que pour $n = 2, 4, 8$.

Nous appelons *unitoïdes* les ensembles munis de la multiplication avec unité, et les espaces topologiques sont dits *unitoïdes topologiques* s'ils sont des unitoïdes avec multiplication continue. Ainsi, *la sphère S^n n'est un unitoïde topologique que pour $n = 1, 3, 7$.* (D'autre part, on sait depuis la leçon 8 que S^n est un quasi-groupe différentiable pour ces valeurs de n.)

* * *

Dans la leçon 8, l'entier naturel n a été soumis aux conditions suivantes :

Qua. *La sphère S^{n-1} admet une structure presque complexe*;

Prl. *La sphère S^n est parallélisable*;

Qgr. *La sphère S^n est un quasi-groupe différentiable*;

Div. *L'espace $\mathbb{R}^{n+1}$ est une algèbre à division*;

Div_1. *L'espace $\mathbb{R}^{n+1}$ est une algèbre à division avec unité,*

et on a établi certaines implications. Par exemple, Div $\Rightarrow$ Div_1 d'après le problème 14 de ladite leçon.

Nous ajoutons à cinq conditions citées

Unt. *La sphère S^n est un unitoïde topologique*;

Odd. *Il existe une application $S^{2n+1} \to S^{n+1}$ à invariant de Hopf impair.*

(A vrai dire, la dernière condition suppose que n est impair, mais désireux d'éviter des restrictions triviales, nous convenons qu'elle a encore un sens pour n pair sans être jamais vérifiée.)

La formule (13) admise sans démonstration entraîne **Unt** $\Rightarrow$ **Odd**.

Dans la leçon 8, on a démontré **Qgr** $\Rightarrow$ **Prl**. On prouve facilement **Prl** $\Rightarrow$ **Unt**, implication affaiblie de sens contraire. En effet, l'existence d'un parallélisme sur S^n signifie qu'on définit en chaque point $\mathbf{x} \in S^n$ une base orthonormée $\mathbf{f}_1(\mathbf{x}), \ldots, \mathbf{f}_n(\mathbf{x})$ de l'espace tangent, qui dépend continûment de $\mathbf{x}$. Soit $A(\mathbf{x})$ une matrice d'ordre $n+1$ à lignes les vecteurs $\mathbf{x}, \mathbf{f}_1(\mathbf{x}), \ldots, \mathbf{f}_n(\mathbf{x})$. Elle est orthogonale et telle que $\mathbf{e}_0 A(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, avec $\mathbf{e}_0 = (1, 0, \ldots, 0)$. Aussi, la formule

$$\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} A(\mathbf{e}_0)^{-1} A(\mathbf{y})$$

définit sur S^n la multiplication avec unité $\mathbf{e}_0$. □

On appelle *multiplication vectorielle* l'opération bilinéaire $\mathbf{x}, \mathbf{y} \mapsto \mathbf{x} \times \mathbf{y}$ sur un espace euclidien $\mathcal{A}$ si, pour tout $\mathbf{x}$ et tout $\mathbf{y}$ de $\mathcal{A}$,

a) le vecteur $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ est orthogonal à $\mathbf{x}$ et à $\mathbf{y}$:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x} \times \mathbf{y}) = 0, \quad (\mathbf{x} \times \mathbf{y}, \mathbf{y}) = 0;$$

b)

$$|\mathbf{x} \times \mathbf{y}|^2 + |(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2 = |\mathbf{x}|^2 |\mathbf{y}|^2$$

(nous désignons par $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ le produit scalaire de deux vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$; dans la *Géométrie analytique*, on a employé la notation $\mathbf{xy}$).

Une opération quelconque (non nécessairement bilinéaire) $\mathbf{x}, \mathbf{y} \mapsto \mathbf{x} \times \mathbf{y}$ sur un espace euclidien $\mathcal{A}$ est la *multiplication vectorielle continue* si elle remplit les conditions a) et b).

Un espace euclidien $\mathcal{A}$ qui est une algèbre sur $\mathbb{R}$ est dit *algèbre normée* si

$$|\mathbf{xy}| = |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|$$

quels que soient $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{A}$.

Ces définitions sont à la base des conditions suivantes:

Vect. *Il existe sur* $\mathbb{R}^n$ *la multiplication vectorielle*;

Cont. *Il existe sur* $\mathbb{R}^n$ *la multiplication vectorielle continue*;

Norm. *Il existe sur* $\mathbb{R}^{n+1}$ *la multiplication pour laquelle* $\mathbb{R}^n$ *est une algèbre normée*;

Norm$_1$. *Il existe sur* $\mathbb{R}^{n+1}$ *la multiplication pour laquelle* $\mathbb{R}^n$ *est une algèbre normée avec unité.*

L'exemple de la multiplication vectorielle usuelle montre que la condition **Vect** est satisfaite pour $n = 3$. Elle l'est de même quand $n = 1$. (S'agissant d'un espace euclidien de dimension 1, c'est la multiplication nulle qui présente les propriétés a) et b).)

Si l'on prend les corps $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ et l'algèbre $\mathbb{C}a$, on voit que la condition **Norm$_1$** est remplie pour $n + 1 = 1, 2, 4, 8$.

Il est clair que toute algèbre normée est une algèbre à division

(quel que soit $a \in \mathcal{A}$, les opérateurs $x \mapsto ax$ et $x \mapsto xa$ ont leur noyau nul, si bien qu'ils sont non dégénérés vu que $\mathcal{A}$ est de dimension finie). Aussi **Norm** $\Rightarrow$ **Div**.

Problème 13. Montrer que **Norm** $\Leftrightarrow$ **Norm$_1$**. [*Indication*. Cf. Problème 14 de la leçon 8.]

Soient e l'unité de l'algèbre normée $\mathcal{A}$, et $\mathcal{A}^\perp$ le complément orthogonal de $\mathcal{A}$. On désigne par $\mathbf{x} \times \mathbf{y} \in \mathcal{A}^\perp$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{A}^\perp$ quelconques, la projection orthogonale du vecteur $\mathbf{xy}$ sur $\mathcal{A}^\perp$.

Problème 14. Montrer que l'opération $\mathbf{x}, \mathbf{y} \mapsto \mathbf{x} \times \mathbf{y}$ *est la multiplication vectorielle sur* $\mathcal{A}^\perp$. [*Indication*. Démontrer que

$$\mathbf{xy}\cdot\bar{\mathbf{y}} = (\mathbf{y}, \mathbf{y})\,\mathbf{x}, \text{ où } \bar{\mathbf{y}} = ka - \mathbf{y}' \text{ si } \mathbf{y} = k\mathbf{e} + \mathbf{y}' \text{ et } \mathbf{e} \perp \mathbf{y}'.]$$

Par conséquent, **Norm$_1$** $\Rightarrow$ **Vect**.

Inversement, soit $\mathcal{A}'$ un espace euclidien muni de la multiplication vectorielle, et soit $\mathcal{A} = \mathbb{R}\mathbf{e} \oplus \mathcal{A}'$ un espace euclidien avec le produit scalaire $(a\mathbf{e} + \mathbf{x}, b\mathbf{e} + \mathbf{y}) = ab + (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (i.e. la somme directe orthogonale de l'espace $\mathbb{R}\mathbf{e}$ de dimension 1 et de $\mathcal{A}'$).

Problème 15. Démontrer que l'*espace* $\mathcal{A}$ *est une algèbre normée avec unité* e *pour la multiplication*

$$(a\mathbf{e} + \mathbf{x})(b\mathbf{e} + \mathbf{y}) = (ab - (\mathbf{x}, \mathbf{y}))\,\mathbf{e} + (a\mathbf{y} + b\mathbf{x} + \mathbf{x} \times \mathbf{y}).$$

Par conséquent, **Vect** $\Rightarrow$ **Norm$_1$**.

On a du même coup **Cont** $\Rightarrow$ **Unt**.

On établit sans peine que **Vect** $\Rightarrow$ **Qua**. En effet, chaque multiplication vectorielle dans $\mathbb{R}^n$ définit pour tout vecteur $\mathbf{x} \in S^{n-1}$ dans l'espace tangent $T_\mathbf{x}S^{n-1} = (\mathbb{R}\mathbf{x})^\perp$ l'opérateur

$$I_\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathbf{x} \times \mathbf{y}, \quad \mathbf{y} \in T_\mathbf{x}S^{n-1}.$$

Comme $|\mathbf{x}| = 1$ et $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, on a $|I_\mathbf{x}\mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}|^2 |\mathbf{y}|^2 - (\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 = |\mathbf{y}|^2$, si bien que l'opérateur $I_\mathbf{x}$ est orthogonal. $I_\mathbf{x}$ est antisymétrique vu que $(I_\mathbf{x}\mathbf{y}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x} \times \mathbf{y}, \mathbf{y}) = 0$. Aussi, $I_\mathbf{x}^2 = -\mathrm{id}$ (voir problème 3 de la leçon 8), i.e. ces opérateurs sont les opérateurs structure complexe. □

Cette façon d'agir a été en fait la nôtre dans la leçon 8.

L'implication de sens contraire sous forme affaiblie, i.e. **Qua** $\Rightarrow$ **Cont**, est prouvée sans difficulté.

Soit $\mathbf{x} \mapsto I_\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in S^{n-1}$, la structure presque complexe sur la sphère S^{n-1} de $\mathbb{R}^n$. On constate de suite que les vecteurs $\mathbf{y}$ et $I_\mathbf{x}\mathbf{y}$, avec $\mathbf{y}$ le vecteur unité quelconque de $T_\mathbf{x}S^{n-1}$, sont linéairement indépendants (ils forment une base du sous-espace $[\mathbf{y}, I_\mathbf{x}\mathbf{y}]$ qu'ils engendrent). [En effet, si $a\mathbf{y} + bI_\mathbf{x}\mathbf{y} = 0$, alors $aI_\mathbf{x}\mathbf{y} - b\mathbf{y} = 0$, donc $(a^2 + b^2)\,\mathbf{y} = 0$.] Aussi, on définit

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \frac{I_\mathbf{x}\mathbf{y} - (I_\mathbf{x}\mathbf{y}, \mathbf{y})\,\mathbf{y}}{|I_\mathbf{x}\mathbf{y} - (I_\mathbf{x}\mathbf{y}, \mathbf{y})\,\mathbf{y}|}$$

(ce vecteur unité joint à y forme une base orthonormée de même sens que y, I_xy du plan [y_x, I_xy]). Le produit x × y se trouve donc défini pour n'importe quels vecteurs orthogonaux x, y ∈ S^{n-1}.

On étend ce produit aux vecteurs x, y quelconques de $\mathcal{R}^n$ si l'on pose

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{cases} 0 \text{ si } \mathbf{x}, \mathbf{y} \text{ sont linéairement dépendants,} \\ \sqrt{|\mathbf{x}|^2 - |\mathbf{y}|^2 - (\mathbf{x}, \mathbf{y})^2}\,(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \text{ dans le cas contraire,} \end{cases}$$

où

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}, \quad \mathbf{v} = \frac{|\mathbf{x}|^2 \mathbf{y} - (\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{x}}{||\mathbf{x}|^2 \mathbf{y} - (\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{x}|}$$

sont le résultat du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt appliqué à x et y. La multiplication ainsi construite possède (c'est évident) les propriétés a) et b). □

* * *

Toutes les implications citées forment le schéma ci-dessous. Les flèches fines représentent celles qui sont ou bien triviales, ou bien établies de façon élémentaire. La flèche *1* équivaut au théorème de

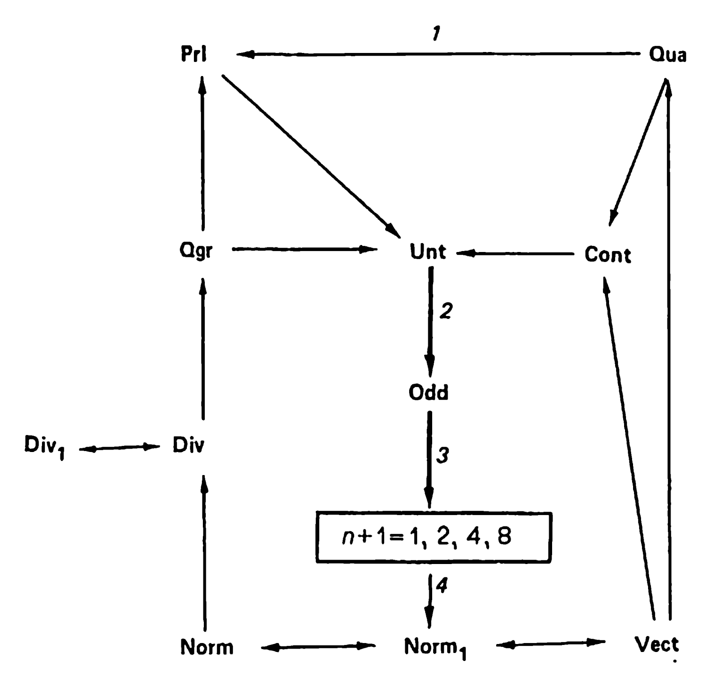


Fig. 5.

Kirchhoff (proposition 2 de la leçon 8), et l'implication *4* découle de l'existence des algèbres ℝ, ℂ, ℍ et $\mathbb{C}a$. Deux flèches grasses sont les implications que nous avons démontrées partiellement et (ou) avec des lacunes. La flèche *3* représente le résultat le plus profond et le plus difficile à prouver.

L'implication d'ordre technique *2* est beaucoup plus simple. Nous en avons omis la démonstration qui s'appuie uniquement sur les propriétés générales élémentaires des K-groupes que nous n'avons pas eu le temps d'énoncer.

Par une chasse au diagramme des implications, on voit de suite qu'on passe d'une condition à n'importe quelle autre, i.e. *dix conditions imposées au nombre n sont toutes équivalentes.*

Un résultat étonnant!

L'implication **Prl** $\Rightarrow n + 1 = 1, 2, 4, 8$ correspond à l'affirmation **B** de la leçon 8.

On voudrait évidemment que l'équivalence des conditions **Div**, **Norm** et **Cont**, par exemple, soit démontrée de façon plus directe. On ne dispose sur ce plan que d'un théorème de Hurwitz (fin du XIXe siècle) qui dit que *toute algèbre normée avec unité est isomorphe à l'une des algèbres* ℝ, ℂ, ℍ, $\mathbb{C}a$ (i.e. l'implication *4* est inversible).

LEÇON 25

Fibrés principaux sur les sphères. — Application caractéristique pour le fibré $\tau_{S^{n+1}}$. — Application caractéristique pour le fibré $\tau^{U}_{S^{n+1}}$. — La non-existence d'un parallélisme sur les sphères S^{4l+1}. — Groupes d'homotopie des espaces pointés. — Une autre définition des groupes d'homotopie. — Groupes d'homotopie et classes d'homotopie des applications de sphères. — Groupes d'homotopie des espaces abéliens.

On a établi (voir leçon 24) que les applications à invariant de Hopf impair n'existent que pour $n = 1, 2, 4, 8$. Outre qu'elle paraît un peu artificielle, cette démonstration lacunaire ne touche pas au fond du problème. Dans cette leçon et dans les deux leçons suivantes, nous élaborerons un procédé plus direct, dépourvu du défaut mentionné, qui nous permettra ensuite d'aborder les K-groupes. On s'appuiera en l'occurrence sur l'exemple des sphères S^{n+1} non parallélisables pour $n = 4l$.

* * *

Soit $\xi = (\mathscr{E}, p, S^{n+1})$ un fibré principal arbitraire sur la sphère S^{n+1} (pour des raisons de commodité, la projection est ici notée p et non π comme antérieurement), et soient $U_{(-)}$ et $U_{(+)}$ deux ouverts de S^{n+1} formés des points $\mathbf{x} \in S^{n+1}$ pour lesquels $x^{n+1} < 1/2$ et $x^{n+1} > -1/2$ respectivement.

Problème 1. Montrer que *le fibré ξ admet une section sur chaque $U_{(-)}$, $U_{(+)}$.* [*Indication.* Les ensembles $U_{(-)}$ et $U_{(+)}$ sont homéomorphes à la boule ouverte $(n+1)$-dimensionnelle $\mathring{B}^{n+1}$.]

Soient $s_{(-)}$ une section de ξ sur $U_{(-)}$, et $s_{(+)}$ celle sur $U_{(+)}$. On définit pour tout point $\mathbf{x} \in U_{(-)} \cap U_{(+)}$ (en particulier, pour tout point $\mathbf{x}$ de l'équateur S^n: $x^{n+1} = 0$) l'élément

$$T\mathbf{x} = \tau\,(s_{(+)}(\mathbf{x}),\ s_{(-)}(\mathbf{x})),$$

avec τ la translation pour ξ (voir leçon 1). (L'élément $T\mathbf{x}$ est défini pour le fibré $(SO\,(n+2), p, S^{n+1})$ de la leçon 8 par la formule $T\mathbf{x} = s^{-1}_{(+)}(\mathbf{x})\, s_{(-)}(\mathbf{x})$.) Dans le cas général,

$$s_{(-)}(\mathbf{x}) = s_{(+)}(\mathbf{x})\, T\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in S^n.$$

L'application

$$T : S^n \to \mathscr{G}, \quad \mathbf{x} \mapsto T\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in S^n, \tag{1}$$

est manifestement continue. C'est l'*application caractéristique* (pour le fibré principal ξ).

L'application T dépend certainement du choix des sections $s_{(-)}$ et $s_{(+)}$.

Soient $s'_{(-)}$, $s'_{(+)}$ deux autres sections de ξ sur $U_{(-)}$ et $U_{(+)}$ respectivement, et soit T' : $S^n \to \mathcal{G}$ l'application caractéristique associée. Si

$$h_{(-)}: U_{(-)} \to \mathcal{G}, \quad h_{(+)}: U_{(+)} \to \mathcal{G}$$

sont définies par

$$h_{(-)}(\mathbf{x}) = \tau(s'_{(-)}(\mathbf{x}), s_{(-)}(\mathbf{x})),$$
$$h_{(+)}(\mathbf{x}) = \tau(s'_{(+)}(\mathbf{x}), s_{(+)}(\mathbf{x})),$$

on a sur S^n

$$T'(\mathbf{x}) = h_{(-)}^{-1}(\mathbf{x})\, T(\mathbf{x})\, h_{(+)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S^n.$$

On introduit pour tout point $\mathbf{x} \in S^n$ et tout nombre $t \in I$, $I = [0, 1]$ les points $\mu_{(-)}(\mathbf{x}, t)$, $\mu_{(+)}(\mathbf{x}, t)$ de la sphère S^{n+1} donnés par

$$\mu_{(-)}(\mathbf{x}, t) = \cos\frac{\pi}{2}t\cdot\mathbf{x} - \sin\frac{\pi}{2}t\cdot\mathbf{e}_{n+1},$$

$$\mu_{(+)}(\mathbf{x}, t) = \cos\frac{\pi}{2}t\cdot\mathbf{x} + \sin\frac{\pi}{2}t\cdot\mathbf{e}_{n+1}.$$

(Si t varie de 0 à 1, ces points parcourent les segments du méridien de S^{n+1} qui joint $\mathbf{x}$ de l'équateur aux pôles $-\mathbf{e}_{n+1}$ et $\mathbf{e}_{n+1}$ respectivement.) La formule

$$F(\mathbf{x}, t) = h_{(-)}^{-1}(\mu_{(-)}(\mathbf{x}, t))\, T(\mathbf{x})\, h_{(+)}(\mu_{(+)}(\mathbf{x}, t)), \quad \mathbf{x} \in S^n, \quad t \in I,$$

définit une homotopie

$$F: S^n \times I \to \mathcal{G}$$

(voir définition 3 de la leçon III.26) qui relie T' à l'application

$$a^{-1}Tb: \mathbf{x} \mapsto a^{-1}T(\mathbf{x})\, b,$$

où $a = h_{(-)}(-\mathbf{e}_{n+1})$, $b = h_{(+)}(\mathbf{e}_{n+1})$.

On suppose que le groupe $\mathcal{G}$ est connexe par arcs (propriété évidente pour le groupe SO $(n + 2)$) et qu'il existe donc dans $\mathcal{G}$ deux chemins u et v qui joignent les points a et b à l'unité e de $\mathcal{G}$. La formule $(\mathbf{x}, t) \mapsto u(t)^{-1}T(\mathbf{x})\, v(t)$ définit une homotopie reliant $a^{-1}Tb$ à T. Ainsi, les applications T et T' sont homotopes.

Autrement dit, *si le groupe $\mathcal{G}$ est connexe par arcs, la classe d'homotopie* $[T]$ *de l'application caractéristique* (1) *ne dépend pas du procédé de construction* (du choix des sections $s_{(-)}$ et $s_{(+)}$). On l'appelle *classe caractéristique du fibré* ξ. (Il n'existe aucun lien direct entre $[T]$ et les classes caractéristiques des leçons 22 et 23.)

Si ξ est trivial (et admet donc une section s sur la sphère S^{n+1} tout entière), on assimile $s_{(-)}$, $s_{(+)}$ aux restrictions de s à $U_{(-)}$ et

$U_{(+)}$ respectivement et l'application caractéristique T ainsi obtenue est l'application constante const_e qui envoie S^n en l'unité e du groupe $\mathcal{G}$. Avec le nom de *classe triviale* qu'on donne à la classe d'homotopie de const_e, on dit par conséquent que *la classe caractéristique d'un fibré principal trivial est triviale.*

On désigne par $\pi_n\mathcal{G}$ l'ensemble de toutes les classes d'homotopie des applications continues de la sphère S^n dans le groupe connexe par arcs $\mathcal{G}$.

Par définition $[T] \in \pi_n\mathcal{G}$.

Problème 2. L'ensemble $\mathcal{G}S^n$ de toutes les applications continues $S^n \to \mathcal{G}$ est muni de façon naturelle d'une structure de groupe. Montrer que

1° *toutes les applications homotopes à l'application constante*

$$\text{const}_e : S^n \to \mathcal{G}, \quad x \mapsto e, \quad x \in S^n,$$

forment un sous-groupe invariant de $\mathcal{G}S^n$;

2° *les classes suivant ce sous-groupe coïncident avec les classes d'homotopie des applications* $S^n \mapsto \mathcal{G}$.

L'ensemble $\pi_n\mathcal{G}$ est donc défini naturellement en tant qu'un groupe. En écriture additive, il s'appelle n-ième *groupe d'homotopie* du groupe connexe par arcs $\mathcal{G}$. Son élément zéro est la classe triviale $[\text{const}_e]$.

Il est clair que la classe caractéristique $[T] \in \pi_n\mathcal{G}$ dépend seulement de la classe de l'isomorphisme du fibré principal ξ, i.e. elle est la même pour les fibrés isomorphes.

Problème 3. Montrer qu'inversement, *les fibrés principaux de groupe* $\mathcal{G}$ *sur la sphère* S^{n+1} *qui ont même classe caractéristique, sont isomorphes.*

Dans ce sens, le groupe $\pi_n\mathcal{G}$ *classifie* les $\mathcal{G}$-fibrés principaux sur S^{n+1}.

On note que $n \geqslant 1$ dans ce cas.

Problème 4. Désigner par $\pi_0\mathcal{G}$ le groupe quotient de $\mathcal{G}$ par sa composant de l'unité et montrer que *le groupe* $\pi_0\mathcal{G}$ *classifie les* $\mathcal{G}$*-fibrés principaux sur la circonférence* S^1.

En particulier, *si* $\mathcal{G}$ *est connexe par arcs, tout* $\mathcal{G}$*-fibré principal sur* S^1 *est trivial.*

On voit que l'affirmation **B** de la leçon 8 sur les sphères S^n non parallélisables équivaut à dire que *la classe caractéristique du* SO $(n+1)$*-fibré* $\tau_{S^{n+1}} = (\text{SO}\,(n+2), \pi, S^{n+1})$ *est non triviale pour* $n \neq 1, 3, 7$. C'est justement cet énoncé de **B** que nous allons prouver. (On remarque que le problème 3 n'est rien pour la nouvelle formulation de ladite affirmation.)

* * *

Il se trouve que l'application caractéristique $T: S^n \to SO(n+1)$ pour le fibré $\tau_{S^{n+1}}$ peut être donnée par une formule explicite.

Soient a, b, b $\neq$ —a, deux points quelconques de S^{n+1}. On désigne par R (b, a) l'élément de SO ($n+2$) qui laisse fixes tous les vecteurs orthogonaux à a, b et qui réalise, dans le plan défini par a et b, une rotation d'angle $<\pi$ qui envoie a en b. (Si a = b, R (b, a) est l'identité.) En particulier, la transformation $\lambda = R(e_n, e_{n+1})^2$ est une rotation d'angle π dans le plan engendré par deux dernières coordonnées.

Problème 5. Montrer que la rotation R (b, a) est définie par

$$R(b, a)x = x - \frac{(a+b)x}{1+ab}(a+b) + 2(ax)b, \quad x \in R^{n+2}.$$

On note que $R(a, b) = R(b, a)^{-1}$.

On définit pour tout point $x \in U_{(-)}$ (resp. $x \in U_{(+)}$) la rotation $\lambda \circ R(\lambda x, e_{n+1})$ (resp. $R(x, e_{n+1})$) qui transforme le vecteur e_{n+1} en le vecteur x. Cela signifie que les formules

$$s_{(-)}(x) = \lambda \circ R(\lambda x, e_{n+1}), \quad x \in U_{(-)},$$
$$s_{(+)}(x) = R(x, e_{n+1}), \quad x \in U_{(+)},$$

définissent les sections

$$s_{(-)}: U_{(-)} \to SO(n+2), \quad s_{(+)}: U_{(+)} \to SO(n+2)$$

du fibré $\tau_{S^{n+1}}$ sur $U_{(-)}$ et $U_{(+)}$ respectivement. (Cela fournit la solution du problème 1 dans le cas de $\tau_{S^{n+1}}$.) Par conséquent, la formule

$$T_{n+1}x = R(e_{n+1}, x) \circ \lambda \circ R(\lambda x, e_{n+1}), \quad x \in S^n,$$

donne

$$T_{n+1}: S^n \to SO(n+1),$$

application caractéristique pour le fibré $\tau_{S^{n+1}}$.

Problème 6. Démontrer que

$$T_{n+1}x = R(x, e_{n+1})^2 = S_x \circ S_{e_n}, \quad x \in S^n,$$

avec S_x la symétrie de R^{n+1} dans l'hyperplan orthogonal en 0 au vecteur x. [*Indication.* Il suffit d'établir que si $x \neq \pm e_n$, les rotations $T_{n+1}x$ et $R(x, e_{n+1})^2$ opèrent identiquement sur la sphère de dimension 2 découpée sur S^n par l'espace de dimension 3 engendré par les vecteurs x, e_{n-1}, e_n.]

Ainsi, $T_{n+1}x$ laisse fixes tous les vecteurs de R^{n+1} orthogonaux aux vecteurs x et e_n, et elle tourne d'angle double le plan défini par x et e_n. (Si $x = \pm e_n$, la transformation $T_{n+1}x$ est identique.)

Problème 7. Montrer que

$$T_{n+1}\mathbf{x} = \| \delta_{ij} - 2x_i x_j \| \cdot \begin{Vmatrix} E & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}$$

pour tout point $\mathbf{x} = (x_0, \ldots, x_n)$ de la sphère S^n (ici E est toujours la matrice unité d'ordre n; les coordonnées sont cette fois munies d'indices inférieurs). [*Indication.* La section $s_{(+)}$ est donnée par

$$s_{(+)}(\mathbf{x}) = \begin{Vmatrix} & & \cdot\, x_0 \\ & & \cdot\;\cdot \\ & & \cdot\;\cdot \\ \delta_{ij} - \dfrac{x_i x_j}{1 + x^n} & & \cdot\;\cdot \\ & & \cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & & x_n \\ -x_0 \;\ldots\; -x_n & & x_{n+1} \end{Vmatrix},$$

où $\mathbf{x} = (x_0, \ldots, x_{n+1}) \in U_{(+)}$.]

En particulier, $T_{n+1}\mathbf{x} = T_{n+1}\mathbf{y}$ a lieu si et seulement si $\mathbf{y} = \pm\mathbf{x}$. Aussi, l'image $T_{n+1}S^n$ par T_{n+1} de la sphère S^n constitue une sous-variété du groupe SO $(n+1)$, qui est difféomorphe à l'espace projectif $\mathbb{R}P^n$ (et l'application $T_{n+1}\colon S^n \to T_{n+1}S^n$ est un revêtement à deux feuillets).

Problème 8. Montrer que l'*application composée*

$$(2) \qquad S^n \xrightarrow{T_{n+1}} \mathrm{SO}(n+1) \xrightarrow{p_1} S^n$$

de la sphère S^n sur elle-même, avec p_1 la projection du fibré principal τ_{S^n}, est de degré 0 *pour n pair et de degré* 2 *pour n impair.* [*Indication.* On calcule le degré à l'aide de la proposition 1 de III.26. On note que (2) est sur chaque hémisphère $x^n > 0$ et $x^n < 0$ un homéomorphisme sur la sphère épointée $S^n \setminus \{-\mathbf{e}_n\}$, et elle conserve l'orientation sur $x^n > 0$ (son degré est $+1$). Quant à son degré pour $x^n < 0$, il est égal au degré $(-1)^{n+1}$ de l'application antipodale $\mathbf{x} \mapsto -\mathbf{x}$.]

Si T_{n+1} est homotope à une application constante (la classe caractéristique de T_{n+1} est triviale), il en est de même de (2) qui est donc de degré 0. Par conséquent, T_{n+1} n'est pas homotope pour n impair à une application constante, si bien quel le fibré $\tau_{S^{n+1}}$ n'est pas trivial. Autrement dit, *la sphère S^{n+1} n'est pas parallélisable pour n impair.*

Le cas de n pair (seul nécessaire au problème de complexification des sphères) réclame des raisonnements plus subtiles.

* * *

Soit $n = 2m$ pair. On considère la sphère $S^{n+1} = S^{2m+1}$ comme sphère unité de l'espace unitaire $\mathbb{C}^{m+1}$ (de base $\mathbf{e}_0, \ldots, \mathbf{e}_m$). Cela permet d'introduire l'analogue unitaire $\tau^{U}_{S^{n+1}}$ du SO$(n+1)$-fibré

principal $\tau_{S^{n+1}}$. Par définition

$$\overset{\mathrm{U}}{\tau}_{S^{n+1}} = (\mathrm{U}(m+1),\ p^{\mathrm{U}},\ S^{n+1}),$$

avec p^{U} l'application $\mathrm{U}(m+1) \to S^{n+1}$ définie par

$$p^{\mathrm{U}}A = Ae_m,\ A \in \mathrm{U}(m+1).$$

[*Question.* Quelle est la relation entre le fibré tangent $\tau_{S^{n+1}}$ et le fibré vectoriel complexe $\overset{\mathrm{U}}{\tau}_{S^{n+1}}$ associé au fibré principal $\overset{\mathrm{U}}{\tau}_{S^{n+1}}$?]

L'application caractéristique T^{U}_{n+1} pour $\overset{\mathrm{U}}{\tau}_{S^{n+1}}$ est l'application $S^n \to \mathrm{U}(m)$, $n = 2m$, et elle peut être définie elle aussi par une formule explicite.

Problème 9. Montrer que

$$T^{\mathrm{U}}_{n+1}z = \left\| \delta_{ij} - \frac{2z_iz_j}{(1+z_m)^2} \right\|, \quad i,\ j = 0,\ \ldots,\ m-1,$$

pour tout point $z = (z_0,\ \ldots,\ z_m)$, $\mathrm{Re}\ z_m = 0$, de l'équateur $S^n \subset S^{n+1}$.

L'analogue de l'application composée (2) est

$$S^n \xrightarrow{T^{\mathrm{U}}_{n+1}} \mathrm{U}(m) \xrightarrow{p^{\mathrm{U}}_1} S^{n-1}, \tag{3}$$

avec p^{U}_1 la projection $\mathrm{U}(m) \to S^{n-1}$ du fibré principal $\overset{\mathrm{U}}{\tau}_{S^{n+1}}$. A la différence de (2), c'est une application sur une sphère *de dimension plus petite.* Aussi, établir si elle est homotope ou non à une application constante est un problème ardu et délicat.

Pour établir un lien entre T^{U}_{n+1} et T_{n+1} (qui est notre objectif), nous utilisons l'identification $\mathbb{C}^m = \mathbb{R}^n$, $n = 2m$, qui fait du groupe $\mathrm{U}(m)$ un sous-groupe de $\mathrm{SO}(n)$ (c'est exactement le groupe symétrique orthogonal $\mathrm{Sp}(m;\ \mathbb{R}) \cap \mathrm{O}(2m)$; cf. problème 4 de la leçon III.11). Ainsi, $\mathrm{U}(m) \subset \mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{U}(m+1) \subset \mathrm{SO}(n+2)$, si bien que les sections $s_{(+)}$, $s_{(-)}$ du fibré $\overset{\mathrm{U}}{\tau}_{S^{n+1}}$ sont celles de $\tau_{S^{n+1}}$ et les applications T^{U}_{n+1} et T_{n+1} sont liées par la formule

$$T_{n+1} = i \circ T^{\mathrm{U}}_{n+1}, \tag{4}$$

i étant l'injection $\mathrm{U}(m) \to \mathrm{SO}(n) \subset \mathrm{SO}(n+1)$.

[Pareillement, on définit pour $m = 2l+1$ (i.e. pour $n = 4l+2$) sur la sphère $S^{n+1} = S^{4l+3}$ le fibré principal $(\mathrm{U^H}(l+1),\ p,\ S^{n+1})$ de groupe unitaire quaternionique $\mathrm{U^H}(l)$, et on a pour l'application caractéristique T^{Sp}_{n+1} de ce fibré la formule

$$T^{\mathrm{U}}_{n+1} = i' \circ T^{\mathrm{Sp}}_{n+1},$$

i' étant l'injection $U^{H}(l) \to U(2l) \subset U(2l+1)$. Comme le groupe $U(2l)$ est une fibre de la projection $p_1^U: U(2l+1) \to S^{4l+1} = S^{n-1}$, il s'ensuit que *l'application* (3) *est une application constante pour m impair.*]

La mise en œuvre de la formule (4) doit être précédée de certaines constructions générales.

* * *

On se place dans les espaces topologiques $\mathscr{X}$ d'une classe qui comprend tous les groupes topologiques connexes par arcs $\mathscr{G}$ et tous les espaces topologiques connexes par arcs et simplement connexes (en particulier, les sphères S^m, $m \geqslant 2$). On munit pour tout $n \geqslant 1$ l'ensemble

$$\pi_n \mathscr{X} = [S^n, \mathscr{X}]$$

de toutes les classes d'homotopie des applications continues $S^n \to \mathscr{X}$ de l'opération de multiplication pour laquelle *cet ensemble est un groupe abélien* (dont l'élément 0 est la classe d'homotopie [const] d'une application constante quelconque $S^n \to \mathscr{X}$) et on démontre (hélas! partiellement) les affirmations suivantes:

a. Si $\mathscr{X}$ est un groupe topologique connexe par arcs $\mathscr{G}$, le groupe $\pi_n \mathscr{X}$ coïncide avec $\pi_n \mathscr{G}$ introduit plus haut.

b. Quelle que soit l'application continue $f: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$, l'application $f_*: \pi_n \mathscr{X} \to \pi_n \mathscr{Y}$ définie par

$$f_* \alpha = [f \circ u], \quad \alpha \in \pi_n \mathscr{X},$$

avec u une application $S^n \to \mathscr{X}$ arbitraire de la classe d'homotopie α, *est un homomorphisme*. Cela étant, $(\mathrm{id})_* = \mathrm{id}$, $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ (*propriété de fonctorialité*) et $f_* = g_*$ si f et g sont homotopes (*propriété d'invariance homotopique*). Si f est homotope à une application constante, alors f_* est un homomorphisme nul (il transforme tout le groupe $\pi_n \mathscr{X}$ en l'élément zéro de $\pi_n \mathscr{Y}$).

c. On définit pour tout groupe de Lie connexe par arcs $\mathscr{G}$ et tout son sous-groupe fermé connexe par arcs $\mathscr{H}$ l'homomorphisme

$$\partial: \pi_{n+1}(\mathscr{G}/\mathscr{H}) \to \pi_n \mathscr{H} \tag{5}$$

tel que la suite

$$\ldots \to \pi_{n+1}(\mathscr{G}/\mathscr{H}) \xrightarrow{\partial} \pi_n \mathscr{H} \xrightarrow{i_*} \pi_n \mathscr{G} \xrightarrow{p_*} \pi_n \mathscr{G}/\mathscr{H} \to \ldots \tag{6}$$

de groupes et d'homomorphismes, où $i: \mathscr{H} \to \mathscr{G}$ est une injection et $p: \mathscr{G} \to \mathscr{G}/\mathscr{H}$ une projection, soit *exacte* (l'image de l'homomorphisme incident de chaque terme coïncide avec le noyau de l'homomorphisme sortant). Quel que soit l'homomorphisme $\varphi: \mathscr{G} \to \mathscr{G}'$ qui envoie

le sous-groupe $\mathscr{H}'$ en le sous-groupe $\mathscr{H}' \subset \mathscr{G}'$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi_{n+1}(\mathscr{G}/\mathscr{H}) & \xrightarrow{\partial} & \pi_n\mathscr{H} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_{n+1}(\mathscr{G}'/\mathscr{H}') & \xrightarrow{\partial} & \pi_n\mathscr{H}', \end{array}$$

où les flèches verticales sont induites par l'homomorphisme φ (plus précisément, par les applications $\mathscr{H} \to \mathscr{H}'$ et $\mathscr{G}/\mathscr{H} \to \mathscr{G}'/\mathscr{H}'$ définies par φ), est *commutatif* (si l'on suit les flèches à partir de l'angle supérieur gauche, tout chemin aboutit au même résultat).

d. *Si* $\mathscr{G} = \mathrm{SO}(n)$, $\mathscr{H} = \mathrm{SO}(n-1)$, *l'image de l'homomorphisme* $\partial : \pi_{n+1}S^n \to \pi_n \mathrm{SO}(n)$ (on rappelle que $\mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n) = S^n$) *coïncide avec l'image de l'homomorphisme*

$$(T_n)_* : \pi_n S^{n-1} \to \pi_n \mathrm{SO}(n)$$

induit par l'application caractéristique $T_n : S^{n-1} \to \mathrm{SO}(n)$.

e. *Le groupe* $\pi_{n+1}S^{n+1}$, $n \geqslant 3$, *est non trivial.*

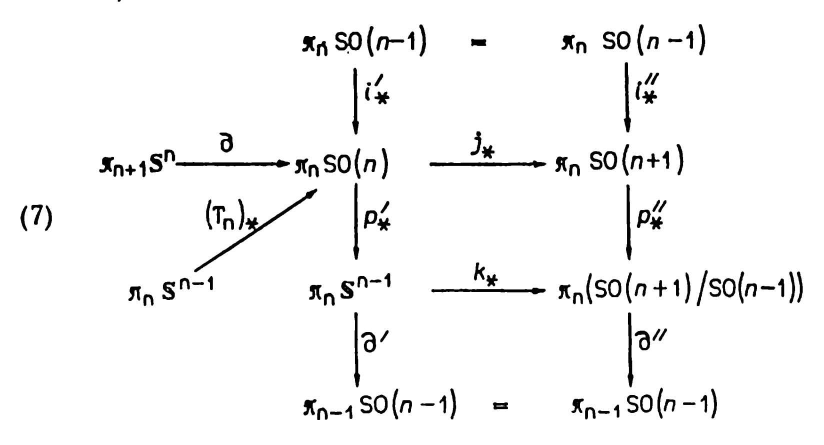
f. *L'application* $f : S^n \to S^n$ *de degré pair induit pour* $n \geqslant 3$ *l'homomorphisme nul* $f_* : \pi_{n+1}S^n \to \pi_{n+1}S^n$.

g. *Si* $n = 4l$, *l'application* (3) *n'est pas homotope à une application constante* (*elle donne un élément non nul du groupe* $\pi_{4l}S^{4l-1}$).

Ces faits suffisent pour démontrer l'affirmation **B** de la leçon 8 dans le cas $n = 4l$.

Proposition 1. *Si* $n = 4l$, *la sphère* S^{n+1} *n'est pas parallélisable* (*si bien que la sphère* S^n *n'admet pas de structure presque complexe*).

D é m o n s t r a t i o n. Soit le diagramme (évidemment commutatif)



dont les lignes et les colonnes sont exactes, avec

∂ l'homomorphisme (5) pour $\mathscr{G} = \mathrm{SO}(n+1)$ et $\mathscr{H} = \mathrm{SO}(n)$;

j l'injection $\mathrm{SO}(n) \to \mathrm{SO}(n+1)$;

k l'injection induite $S^{n-1} = SO(n)/SO(n-1) \to SO(n+1)/ /SO(n-1)$;

i', i'' les injections $SO(n-1) \to SO(n)$, $SO(n-1) \to \to SO(n+1)$;

p', p'' les projections $SO(n) \to S^{n-1}$, $SO(n+1) \to SO(n+1)/ /SO(n-1)$;

∂', ∂'' les homomorphismes (5) correspondants.

Soit $\eta \in \pi_n S^{n-1}$. Si $k_* \eta = 0$, alors $\partial' \eta = \partial'' k_* \eta = 0$, et il existe donc (vu l'exactitude) un élément $\alpha \in \pi_n SO(n)$ tel que $p'_* \alpha = = \eta$. De plus, $p''_* j_* \alpha = k_* p'_* \alpha = k_* \eta = 0$, et on trouve par conséquent un élément $\beta \in \pi_n SO(n-1)$ tel que $i''_* \beta = j_* \alpha$. Mais $\alpha' = = \alpha - i'_* \beta$ vérifie alors l'égalité

$$j_* \alpha' = j_* \alpha - j_* i'_* \beta = j_* \alpha - i''_* \beta = 0,$$

si bien qu'il existe $\gamma \in \pi_{n+1} S^n$ pour lequel $\partial \gamma = \alpha$. [Cette façon d'agir s'appelle *chasse au diagramme*: on raisonne mentalement tout en promenant l'index sur les flèches.] Par conséquent, $\pi_n S^{n-1}$ contient selon d un élément γ' tel que $(T_n)_* \gamma' = \alpha$, donc

$$(p' \circ T_n)_* \gamma' = p'_* \alpha = \eta.$$

Or, on sait que ou bien l'application $p' \circ T_n : S^{n-1} \to S^{n-1}$ est homotope à une application constante (et elle induit donc l'homomorphisme nul $\pi_n S^{n-1} \to \pi_n S^{n-1}$), ou bien elle est de degré 2 (auquel cas elle induit également un homomorphisme nul par suite de f). Dans les deux cas, $(p' \circ T_n)_* \gamma' = 0$, d'où $\eta = 0$.

Ainsi, l'*homomorphisme k_* du diagramme* (7) *est un monomorphisme.*

Soit α_0 un élément du groupe $\pi_n SO(n)$, qui est la classe d'homotopie de l'application T^U_{n+1} considérée comme $S^n \to SO(n)$ en vertu de l'injection $U(m) \to SO(n)$, $m = 2l$. Comme l'application composée

$$U(m) \to SO(n) \xrightarrow{p'} S^{n-1}$$

n'est évidemment autre que la projection $U(m) \to S^{n-1}$ du fibré $\tau^U_{S^{n-1}}$, l'élément $p'_* \alpha_0$ est la classe d'homotopie de (3), si bien qu'il est non nul selon g. L'application k^* étant un monomorphisme, on a de même $p''_* j_* \alpha_0 = k_* p'_* \alpha_0 \neq 0$, donc $j_* \alpha_0 \neq 0$ (on recourt toujours à une chasse au diagramme).

On indique pour avoir le résultat voulu que la composée des injections $U(m) \to SO(n)$ et j: $SO(n) \to SO(n+1)$ est par définition exactement l'injection i: $U(m) \to SO(n+1)$ de (4), si bien que cette formule entraîne $j_* \alpha_0 = [T_{n+1}]$, avec T_{n+1} l'application caractéristique pour le fibré $\tau_{S^{n+1}}$. Ainsi, $[T_{n+1}] \neq 0$, et la sphère S^{n+1} n'est pas parallélisable ($\tau_{S^{n+1}}$ n'est pas trivial). □

* * *

On passe à la démonstration des affirmations **a** à **g**.

Définition 1. Un espace topologique $\mathscr{X}$ de point base x_0 est dit *pointé*. Une application $f: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ de deux espaces pointés de points distingués x_0 et y_0 est *pointée* si $f(x_0) = y_0$, et on note

$$f: (\mathscr{X}, x_0) \to (\mathscr{Y}, y_0).$$

Deux applications pointées $f, g: (\mathscr{X}, x_0) \to (\mathscr{Y}, y_0)$ sont dites *homotopes d'une façon pointée* s'il existe une homotopie $F: \mathscr{X} \times I \to \mathscr{Y}$ qui les relie et telle que $F(x_0, t) = y_0$ pour tout $t \in I$. (Ce sont des homotopies *pointées*.)

Soient

$$I^n = \{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n;\quad 0 \leqslant t^1 \leqslant 1, \ldots, 0 \leqslant t^n \leqslant 1\}$$

le *cube unité* de $\mathbb{R}^n$, et $\dot I^n$ sa *frontière* (formée des points $\mathbf{t}$ pour lesquels $t^i = 0$ ou 1 pour au moins un indice $i = 1, \ldots, n$). Nous généralisons la construction du groupe fondamental $\pi_1(\mathscr{X}, x_0)$ de la leçon 3 et nous considérons à cet effet pour un espace pointé $(\mathscr{X}, x_0)$ quelconque toutes les applications $u: I^n \to \mathscr{X}$ telles que $u(\dot I^n) = x_0$. (Ce qui se note $u: (I^n, \dot I^n) \to (\mathscr{X}, x_0)$.) Deux applications u sont *homotopes relativement à* $\dot I^n$ (en abrégé rel $\dot I_n$) s'il existe une homotopie $f: I^n \times I \to \mathscr{X}$ qui les relie et qui présente la propriété suivante: $f(\mathbf{t}, t) = x_0$ pour tout $\mathbf{t} \in \dot I^n$ et tout $t \in I$ (i.e. $f_t: \mathbf{t} \mapsto f(\mathbf{t}, t)$ est pour chaque $t \in I$ l'application $(I^n, \dot I^n) \to (\mathscr{X}, x_0)$).

On identifie I^n à $I^{n-1} \times I$ et on pose pour n'importe quelles applications $u, v: (I^n, \dot I^n) \to (\mathscr{X}, x_0)$:

$$(u+v)(\mathbf{t}, t) = \begin{cases} u(\mathbf{t}, 2t) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ v(\mathbf{t}, 2t-1) & \text{si } 1/2 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

où $\mathbf{t} \in I^{n-1}$, $t \in I$. Il est clair que $u + v$ est continue et constitue l'application $(I^n, \dot I^n) \to (\mathscr{X}, x_0)$.

Problème 10. Montrer que

1° *la relation d'homotopie* rel $\dot I^n$ *est une relation d'équivalence*;

2° *la formule*

$$[u] + [v] = [u + v] \tag{8}$$

définit complètement une opération d'addition sur l'ensemble $\pi_n(\mathscr{X}, x_0)$ *de toutes les classes d'homotopie relativement à* $\dot I^n$ *des applications* $(I^n, \dot I^n) \to (\mathscr{X}, x_0)$;

3° *l'ensemble* $\pi_n(\mathscr{X}, x_0)$ *est un groupe pour l'opération* (8), *dont l'élément zéro est la classe* $[\mathrm{const}_{x_0}]$ *de* $\mathrm{const}_{x_0}: \mathbf{t} \mapsto x_0$.

[*Indication*. Si $n = 1$, on retrouve les résultats de la leçon 3.]

Dans la leçon 3, $\pi_1(\mathscr{X}, x_0)$ a été muni d'une opération de multiplication, ce qui nous oblige à réserver de règle les notations additives pour les cas $n \geqslant 2$.

Le groupe $\pi_n(\mathscr{X}, x_0)$ coïncide manifestement avec $\pi_n(\mathscr{X}_0, x_0)$, $\mathscr{X}_0$ étant la composante connexe par arcs avec x_0 de l'espace $\mathscr{X}$.

Définition 2. $\pi_n(\mathscr{X}, x_0)$ s'appelle *n-ième groupe d'homotopie* (ou *groupe d'homotopie de dimension* n) de l'espace pointé $\mathscr{X}$.

Remarque 1. On peut prendre au lieu de $(I^n, \dot{I}^n)$ tout couple homéomorphe (B, S) à condition de choisir et de fixer une fois pour toutes un homéomorphisme $(B, S) \to (I^n, \dot{I}^n)$. Les couples le plus utilisés sont $(\mathbb{B}^n, \mathbb{S}^{n-1})$ et $(\mathbb{E}_{(+)}, \mathbb{S}^{n-1})$, $(\mathbb{E}_{(-)}, \mathbb{S}^{n-1})$, où $\mathbb{E}_{(+)}$ et $\mathbb{E}_{(-)}$ sont les hémisphères $x^n \geqslant 0$ et $x^n \leqslant 0$ de $\mathbb{S}^n$.

Soit $f: (\mathscr{X}, x_0) \to (\mathscr{Y}, y_0)$ une application pointée quelconque.

Problème 11. Démontrer que

1° *quel que soit* $n \geqslant 1$, *la formule*

$$f_*[u] = [f \circ u], \quad u: (I^n, \dot{I}^n) \to (\mathscr{X}, x_0),$$

définit parfaitement une application

$$f_*: \pi_n(\mathscr{X}, x_0) \to \pi_n(\mathscr{Y}, y_0);$$

2° *cette application est un homomorphisme*;

3° *si* $f = \mathrm{id}$, *alors* $f_* = \mathrm{id}$ *et* $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ *pour les applications pointées* $f: (\mathscr{X}, x_0) \to (\mathscr{Y}, y_0)$, $g: (\mathscr{Y}, y_0) \to (\mathscr{Z}, z_0)$ *arbitraires.*

La dernière propriété est la *propriété de fonctorialité*: en termes de catégories, elle signifie que π_n est un foncteur de la catégorie des espaces pointés dans celle des groupes.

Si $n \geqslant 2$, chaque application $u: (I^n, \dot{I}^n) \to (\mathscr{X}, x_0)$ s'identifie naturellement à l'application $u^\#: (I^{n-1}, \dot{I}^{n-1}) \to (\Omega\mathscr{X}, e_{x^0})$ définie par

$$u^\#(\mathrm{t})(t) = u(t, \mathrm{t}), \quad \mathrm{t} \in I^{n-1}, \ t \in I,$$

avec $\Omega\mathscr{X} = \mathscr{P}(x_0, \mathscr{X}, x_0)$ l'espace des lacets en x_0 de $\mathscr{X}$ et $e_{x_0}: t \mapsto x_0$ un lacet constant (voir leçon 3; on identifie I^n au cube $I \times I^{n-1}$).

Problème 12. Montrer que cela donne lieu à l'identification

$$\pi_n(\mathscr{X}, x_0) = \pi_{n-1}(\Omega\mathscr{X}, e_{x_0}), \quad n \geqslant 2 \tag{9}$$

(isomorphisme canonique) qu'on appelle *isomorphisme de Hurewicz.*

Si l'espace $\mathscr{X}$ est un unitoïde topologique avec unité x_0, i.e. s'il est muni de la multiplication continue

$$\mathscr{X} \times \mathscr{X} \to \mathscr{X}, \quad (x, y) \mapsto xy,$$

telle que $x_0x = xx_0 = x$ pour tout point x de $\mathscr{X}$, la formule

$$[u]\cdot[v] = [uv],$$

où $(uv)(t) = u(t)\,v(t)$, définit bien (le démontrer !) sur $\pi_n(\mathscr{X}, x_0)$ l'opération de multiplication dont l'unité est $0 = [\mathrm{const}_{x_0}]$ du groupe $\pi_n(\mathscr{X}, x_0)$.

Cela reste évidemment vrai quand x_0 n'est que l'*unité homotopique*, i.e. quand $x_0x_0 = x_0$ et $x \mapsto xx_0$, $x \mapsto x_0x$, $x \in \mathscr{X}$, sont homotopes d'une façon pointée à l'application identique id: $\mathscr{X} \to \mathscr{X}$.

Problème 13. Montrer que *l'addition et la multiplication dans $\pi_n(\mathscr{X}, x_0)$ sont mutuellement distributives*, i.e. qu'on a pour α, β, γ, $\delta \in \pi_n(\mathscr{X}, x_0)$ quelconques:

$$(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = \alpha\gamma + \beta\delta.$$

En particulier,

$$\alpha\beta = (\alpha + 0)(0 + \beta) = \alpha 0 + 0\beta = \alpha + \beta$$

et

$$\alpha\beta = (0 + \alpha)(\beta + 0) = 0\beta + \alpha 0 = \beta + \alpha.$$

Ainsi, *quel que soit l'unitoïde topologique $\mathscr{X}$ (ne possédant que l'unité homotopique x_0 en général), le groupe $\pi_n(\mathscr{X}, x_0)$ est abélien* (et la multiplication et l'addition dans $\pi_n(\mathscr{X}, x_0)$ coïncident).

S'agissant des groupes $\pi_1(\mathscr{X}, x_0)$, la dernière propriété a été démontrée dans la leçon 15 (voir remarque 1 de ladite leçon).

[On note que l'opération de multiplication dans $\pi_n(\mathscr{X}, x_0)$ est donc associative, commutative et inversible, ce qui n'est pas en général le cas de celle dans $\mathscr{X}$.]

L'espace de lacets $\Omega\mathscr{X}$ est un exemple d'unitoïde topologique avec unité homotopique, si bien que tous les groupes $\pi_n(\Omega\mathscr{X}, e_{x_0})$ sont abéliens. Cela prouve en vertu de (9) que *quel que soit l'espace pointé $\mathscr{X}$, le groupe $\pi_n(\mathscr{X}, x_0)$, $n \geqslant 2$, est abélien.*

La propriété des groupes $\pi_n(\mathscr{X}, x_0)$, $n \geqslant 2$, d'être abéliens explique le nom d'addition qu'on donne à leur opération de groupe.

Problème 14. Construire pour $u, v\colon (I^n, \dot{I}^n) \to (\mathscr{X}, x_0)$ quelconques l'homotopie rel $\dot{I}^n$ qui relie les applications $u + v$ et $v + u$ et démontrer que $\pi_n(\mathscr{X}, x_0)$, $n \geqslant 2$, sont des groupes abéliens.

* * *

On choisit dans la sphère $\mathbb{S}^n$, $n \geqslant 1$, un point quelconque $\mathbf{s}_0$ (disons, le point $\mathbf{e}_1$), ce qui transforme $\mathbb{S}^n$ en un espace pointé. On définit pour tout espace pointé $\mathscr{X}$ l'ensemble

$$[\mathbb{S}^n, \mathscr{X}]^{\cdot} = [(\mathbb{S}^n, \mathbf{s}_0), (\mathscr{X}, x_0)]$$

de toutes les classes d'homotopie pointées $[f]^{\cdot}$ des applications pointées $f\colon (\mathbb{S}^n, s_0) \to (\mathscr{X}, x_0)$.

On note que le cube ouvert

$$\dot{I}^n = \{t \in \mathbb{R}^n;\ 0 < t^1 < 1, \ldots, 0 < t^n < 1\}$$

étant une sous-variété ouverte de l'espace orienté $\mathbb{R}^n$ est canoniquement orienté. Pareillement, la boule $\dot{\mathbb{B}}^{n+1}$, domaine de frontière régulière de l'espace orienté $\mathbb{R}^{n+1}$, est canoniquement orientée elle aussi, et il en est donc de même pour son bord $\mathbb{S}^n$.

Problème 15. Construire l'application continue

$$\chi\colon (I^n, \dot{I}^n) \to (\mathbb{S}^n, s_0) \tag{10}$$

qui applique homéomorphiquement, en en conservant l'orientation, le cube ouvert $\mathring{I}^n = I^n \setminus \dot{I}^n$ sur la sphère épointée $\mathbb{S}^n \setminus \{s_0\}$ (autrement dit, c'est un homéomorphisme de degré 1 sur $\dot{I}^n$).

On choisit et on fixe (10), ce qui permet de faire correspondre à chaque application pointée $f\colon (\mathbb{S}^n, s_0) \to (\mathscr{X}, x_0)$ l'application

$$f \circ \chi\colon (I^n, \dot{I}^n) \to (\mathscr{X}, x_0).$$

Problème 16. Montrer que

1° *la formule* $[f]^{\cdot} \to [f \circ \chi]$ *définit parfaitement une application*

$$[\mathbb{S}^n, \mathscr{X}]^{\cdot} \to \pi_n (\mathscr{X}, x_0); \tag{11}$$

2° *l'application* (11) *est une bijection.*

On identifie par (11) le groupe $\pi_n (\mathscr{X}, x_0)$ à l'ensemble $[\mathbb{S}^n, \mathscr{X}]^{\cdot}$, si bien que $\pi_n (\mathscr{X}, x_0)$ a pour éléments les classes d'homotopie $[f]^{\cdot}$ des applications $f\colon (\mathbb{S}^n, s_0) \to (\mathscr{X}, x_0)$.

Problème 17. Montrer que *l'égalité* $[f]^{\cdot} = 0$ *a lieu dans* $\pi_n (\mathscr{X}, x_0)$ *si et seulement si l'on prolonge l'application* $f\colon \mathbb{S}^n \to \mathscr{X}$ *en* $F\colon \mathbb{B}^{n+1} \to \mathscr{X}$ *qui envoie tout le rayon* Os_0 *de la boule* $\mathbb{B}^{n+1}$ *en le point* x_0.

Remarque 2. Il est clair que (11) dépend seulement de la classe d'homotopie rel $\dot{I}^n$ de l'application (10) (de l'élément $[\chi]$ du groupe $\pi_n (\mathbb{S}^n, s_0)$). D'autre part, on montrera plus loin (voir remarque 1 de la leçon 26) que la classe d'homotopie rel $\dot{I}^n$ d'une application (10) quelconque ne dépend que de deg χ (sur $\dot{I}^n$). Comme deg $\chi = 1$ par hypothèse, il en découle que *l'identification* (11) *est indépendante du choix de* (10).

En attendant, on doit être prudent et ne pas oublier que le choix de (10) est absolument arbitraire.

Remarque 3. On pourrait très bien remplacer $(\mathbb{S}^n, s_0)$ par tout couple homéomorphe (S^n, s_0) (à condition de fixer, ne serait-ce qu'à une homotopie pointée près, un certain homéomorphisme $(\mathbb{S}^n, s_0) \to$

$\to (S^n, s_0))$. Puisqu'il existe pour tout s_0 et tout s_1 de S^n un homéomorphisme $(S^n, s_0) \to (S^n, s_1)$ (voire un déplacement) qui conserve l'orientation, il en résulte en particulier (en vertu de la remarque 2) que le choix de $s_0 \in S^n$ n'a aucune importance.

L'identification (11) transporte l'addition de $\pi_n(\mathscr{X}, x_0)$ dans l'ensemble $[S^n, \mathscr{X}]^{\cdot}$. Comment définir cette opération sans passer aux applications $(I^n, \dot{I}^n) \to (\mathscr{X}, x_0)$?

Il y a intérêt à supposer que $s_0 = r_1$.

Soit, une fois de plus, S^{n-1} l'équateur $x^n = 0$ de la sphère S^n, et soit S^n/S^{n-1} l'équateur S^{n-1} réduit à un point. [L'espace S^n/S^{n-1} est par définition l'espace quotient de S^n par la relation d'équivalence $\sim$ telle que $x \sim y$ si et seulement si $x = y$ ou $x, y \in S^{n-1}$.]

Problème 18. Montrer que l'espace S^n/S^{n-1} est canoniquement homéomorphe au sous-ensemble $S^n \vee S^n$ du produit direct $S^n \times S^n$, formé des couples (x, y), $x, y \in S^n$, dont l'une des composantes au moins coïncide avec $e_1 = s_0$ (i.e. à la « croix de coordonnées »). [De façon imagée, $S^n \vee S^n$ est la réunion de deux exemplaires de S^n aux points e_1 collés.]

On considère donc l'application de passage au quotient $\mu: S^n \to S^n/S^{n-1}$ comme

(12) $$\mu: S^n \to S^n \vee S^n.$$

L'espace $S^n \vee S^n$ s'appelle *bouquet*.

Quelles que soient les applications $f, g: (S^n, s_0) \to (\mathscr{X}, x_0)$, nous désignons par $f \vee g$ l'application $S^n \vee S^n \to \mathscr{X}$ qui coïncide avec f sur une sphère du bouquet $S^n \vee S^n$ et avec g sur l'autre. (Formellement, on définit $f \vee g$ par les égalités

$$(f \vee g)(x, s_0) = f(x), \quad (f \vee g)(s_0, y) = g(y), \quad x, y \in S^n.)$$

Problème 19. Montrer que

$$[f]^{\cdot} + [g]^{\cdot} = [(f \vee g) \circ \mu]^{\cdot}$$

dans le groupe $\pi_n(\mathscr{X}, x_0)$. C'est la réponse à la question posée ci-dessus.

* * *

Comme chaque application pointée $(S^n, s_0) \to (\mathscr{X}, x_0)$ est une application non pointée $S^n \to \mathscr{X}$ et chaque homotopie pointée est une homotopie non pointée, on fait correspondre à chaque élément $[f]^{\cdot}$ de $\pi_n(\mathscr{X}, x_0)$ la classe d'homotopie non pointée $[f]$ et on définit parfaitement une application

(13) $$\pi_n(\mathscr{X}, x_0) \to \pi_n\mathscr{X},$$

où $\pi_n \mathscr{X} = [S^n, \mathscr{X}]$ est toujours un ensemble des classes d'homotopie usuelles (non pointées) des applications $S^n \to \mathscr{X}$.

Problème 20. Montrer que *si l'espace $\mathscr{X}$ est connexe par arcs,* (13) *est une surjection.* [*Indication.* Quelle que soit l'application f: $S^n \to \mathscr{X}$, l'application $\{f, u\} \circ r$: $S^n \times I \to \mathscr{X}$, avec r une rétraction du cylindre $S^n \times I$ sur son sous-ensemble $A = (S^n \times 0) \cup \cup \{s_0 \times I\}$, u un chemin quelconque de $\mathscr{X}$ joignant le point $f(s_0)$ à x_0 et $\{f, u\}$ une application $A \to \mathscr{X}$ donnée par

$$\{f, u\}(x, t) = \begin{cases} f(x) & \text{si } t = 0, \\ u(t) & \text{si } x = s_0, \end{cases}$$

est l'homotopie $S^n \times I \to \mathscr{X}$ qui relie f avec une application pointée f_1: $(S^n, s_0) \to (\mathscr{X}, x_0)$. Aussi, il suffit de construire une seule rétraction r.]

Problème 21. Montrer que *les groupes $\pi_n(\mathscr{X}, x_0)$ et $\pi_n(\mathscr{X}, x_1)$ sont isomorphes pous tous x_0 et x_1 de l'espace $\mathscr{X}$-connexe par arcs.* [*Indication.* L'isomorphisme dépend du chemin u joignant le point x_1 au point x_0 et il fait correspondre à chaque élément $[f]^{\cdot} \in \pi_n(\mathscr{X}, x_1)$ l'application finie f_1 de l'homotopie $\{f, u\} \circ r$ de l'indication du problème précédent.]

Problème 22. Montrer que *les isomorphismes $\pi_n(\mathscr{X}, x_1) \to \pi_n \times \times (\mathscr{X}, x_0)$ associés aux chemins homotopes u sont identiques.* [*Indication.* Utiliser le même procédé, mais remplacer S^n par $S^n \times I$ et A par le sous-ensemble $(S^n \times I \times \{0\}) \cup (S^n \times I \times \{1\}) \cup S^n \times \times \{0\} \times I) \cup (\{s_0\} \times I \times I)$ du produit $S^n \times I \times I$.]

On en tire en particulier que tout élément $\xi \in \pi_1(\mathscr{X}, x_0)$ définit un automorphisme

$$\xi^{\#}: \pi_n(\mathscr{X}, x_0) \to \pi_n(\mathscr{X}, x_0), \quad n \geqslant 1,$$

du groupe $\pi_n(\mathscr{X}, x_0)$.

Problème 23. Montrer que ce résultat définit l'*action* du groupe $\pi_1(\mathscr{X}, x_0)$ sur $\pi_n(\mathscr{X}, x_0)$, $n \geqslant 1$ (l'homomorphisme de $\pi_1(\mathscr{X}, x_0)$ dans le groupe des automorphismes de $\pi_n(\mathscr{X}, x_0)$, $n \geqslant 1$).

Problème 24. Montrer que l'automorphisme $\xi^{\#}$ est pour $n = 1$ l'automorphisme intérieur $\alpha \mapsto \xi\alpha\xi^{-1}$ associé à ξ du groupe $\pi_1(\mathscr{X}, x_0)$.

Si $\beta = \xi^{\#}\alpha$, avec $\alpha, \beta \in \pi_n(\mathscr{X}, x_0)$, et si $\alpha = [f]^{\cdot}$, $\beta = [g]^{\cdot}$, où f, g: $(S^n, s_0) \to (\mathscr{X}, x_0)$, alors f et g sont reliées par construction par une homotopie F: $S^n \to \mathscr{X}$ telle que le lacet

$$u: t \mapsto F(s_0, t), \; t \in I,$$

appartienne à la classe ξ. Cela signifie en particulier que les éléments α et β sont pour $\beta = \xi^{\#}\alpha$ collés par l'application (13) (ils ont même image).

Problème 25. Montrer que si, inversement, les applications pointées $f, g: (S^n, s_0) \to (\mathscr{X}, x_0)$ sont reliées par une homotopie $F: S^n \to \mathscr{X}$, alors

$$\beta = \xi \# \alpha, \tag{14}$$

où $\xi \in \pi_1(\mathscr{X}, x_0)$ est la classe du lacet $t \mapsto F(s_0, t)$ et $\alpha, \beta \in \pi_n(\mathscr{X}, x_0)$ sont les classes des applications f et g.

Ainsi, *deux éléments* $\alpha, \beta \in \pi_n(\mathscr{X}, x_0)$ *sont collés par l'application* (13) *si et seulement si l'on a l'égalité* (14) *pour un élément* $\xi \in \pi_1(\mathscr{X}, x_0)$ (i.e. si α, β appartiennent à une même orbite de l'action de $\pi_1(\mathscr{X}, x_0)$ sur $\pi_n(\mathscr{X}, x_0)$).

* * *

Définition 3. On dit qu'un espace topologique $\mathscr{X}$ est *abélien* (ou *homotopiquement simple*) si

a) $\mathscr{X}$ est connexe par arcs;

b) l'application (13) est injective pour tout $n \geqslant 1$ (elle est donc bijective). [Il vient du problème 21 que si elle est injective pour un certain x_0, elle l'est encore pour tout autre choix de ce point; en ce sens la condition b) ne dépend pas de x_0.]

Si $\mathscr{X}$ est abélien, on identifie par (13) pour tout point $x_0 \in \mathscr{X}$ le groupe $\pi_n(\mathscr{X}, x_0)$ à l'ensemble $\pi_n\mathscr{X}$ et on définit donc dans $\pi_n\mathscr{X}$ une opération d'addition qui en fait un groupe.

Le groupe $\pi_n\mathscr{X}$ s'appelle *n-ième groupe d'homotopie de l'espace abélien* $\mathscr{X}$.

On souligne que l'addition dans $\pi_n\mathscr{X}$ est définie *seulement* en présence des identifications (13), i.e. par le choix d'un point x_0 (qui n'influe pas sur le résultat final) de $\mathscr{X}$. Aussi, les groupes $\pi_n\mathscr{X}$ (qui seuls nous intéressent) s'obtiennent inévitablement à partir des groupes $\pi_n(\mathscr{X}, x_0)$.

On note que *l'application*

$$f: S^n \to \mathscr{X}$$

définit l'élément zéro de $\pi_n\mathscr{X}$ *si et seulement si elle est prolongeable en une application* $\mathbb{B}^{n+1} \to \mathscr{X}$. Cf. problème 17.

Conformément aux résultats obtenus après le problème 25, *un espace connexe par arcs* $\mathscr{X}$ *est abélien si et seulement si le groupe* $\pi_1(\mathscr{X}, x_0)$ *opère trivialement pour tout* $n \geqslant 1$ *et tout point* $x_0 \in \mathscr{X}$ *sur le groupe* $\pi_n(\mathscr{X}, x_0)$.

Il en résulte en particulier (voir problème 24) que le groupe fondamental $\pi_1(\mathscr{X}, x_0)$ est abélien pour tout $\mathscr{X}$ abélien, ce qui est la raison d'être du terme « espace abélien ».

On voit de plus que *chaque espace simplement connexe* $\mathscr{X}$ *est abélien* du moment qu'un groupe trivial opère trivialement sur tout groupe.

Si $\mathscr{X}$ connexe par arcs est un groupe topologique (voire un unitoïde topologique) avec unité x_0, la formule

$$F(\mathbf{x}, t) = u(t) f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{S}^n, \quad t \in I,$$

définit pour toute application pointée

$$f\colon (\mathbf{S}^n, \mathbf{s}_0) \to (\mathscr{X}, x_0)$$

et tout lacet

$$u\colon (\dot{I}, I) \to (\mathscr{X}, x_0)$$

une homotopie $F\colon \mathbf{S}^n \times I \to \mathscr{X}$ telle que $u(t) = F(\mathbf{s}_0, t)$, $t \in I$, qui relie l'application f avec elle-même. Aussi (voir problème 25), $\alpha = \xi^{\#}\alpha$, avec $\alpha = [f]^{\cdot}$, $\xi = [u]$, dans le groupe $\pi_n(\mathscr{X}, x_0)$. Ainsi, $\pi_1(\mathscr{X}, x_0)$ opère trivialement sur les groupes $\pi_n(\mathscr{X}, x_0)$, $n \geqslant 1$, si bien que *l'espace $\mathscr{X}$ est abélien.*

La classe des espaces abéliens contient donc tous les espaces connexes par arcs et simplement connexes et tous les groupes topologiques connexes par arcs (et même tous les unitoïdes connexes par arcs).

Ainsi, nous en avons fini avec la première étape de la démonstration de la proposition 1, savoir nous avons défini la classe qui contient tous les espaces connexes par arcs et simplement connexes et tous les groupes topologiques connexes par arcs, et nous avons muni, pour tout $\mathscr{X}$ de cette classe et tout $n \geqslant 1$, l'ensemble $\pi_n\mathscr{X}$ d'une opération d'addition pour laquelle $\pi_n\mathscr{X}$ est un groupe abélien.

Il nous reste à prouver les affirmations a à g (ce que nous ferons dans la leçon suivante).

LEÇON 26

Suite d'homotopie d'une fibration. — Groupes $\pi_n S^m$, $n < m$. — Stabilisation des groupes $\pi_n SO(m)$. — Classification des applications des variétés dans les sphères. — Théorèmes d'Urysohn et de Tietze. — Connexité du groupe $\mathrm{Diff}_0^+ \mathbb{R}^n$. — Démonstration du théorème de prolongement de Hopf.

Notre but immédiat consiste à démontrer les affirmations a à g de la leçon précédente.

D'ailleurs, on a déjà établi (voir leçon 25) les affirmations analogues à a et b dans le cas général d'espaces pointés, dont a et b sont, cela va de soi, des conséquences directes.

Quant à c, nous l'aborderons dans le cadre plus général des fibrations au sens de Hurewicz (voir leçon 2), i.e. des applications continues $p: \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ admettant une connexion (une application continue s qui associe à tout couple (e_0, u), avec e_0 un point de l'espace $\mathscr{E}$ et $u: I \to \mathscr{B}$ un chemin de l'espace $\mathscr{B}$ tel que $p(e_0) = u(0)$, le chemin $s(e_0, u)$ de $\mathscr{E}$ d'extrémité e_0 qui recouvre u, i.e. pour lequel $p \circ s(e_0, u) = u$).

Problème 1 (cf. remarque 2 de la leçon 2). Démontrer que *la projection $p: \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ de tout fibré localement trivial $(\mathscr{E}, p, \mathscr{B})$ de base $\mathscr{B}$ espace séparé compact (voire paracompact) est une fibration au sens de Hurewicz.* [*Indication.* Commencer par le cas où l'espace de base $\mathscr{B}$ est recouvert par deux voisinages trivialisants.]

En particulier, *toute application par passage au quotient $\mathscr{G} \to \mathscr{G}/\mathscr{H}$, avec $\mathscr{G}$ un groupe de Lie et $\mathscr{H}$ son sous-groupe fermé, est une fibration au sens de Hurewicz.*

Nous n'appliquerons cette affirmation qu'aux fibrations de la forme $SO(n+m) \to SO(n+m)/SO(n)$ pour $m = 1$ et $m = 2$. Aussi, il suffit, à ce qu'il paraît, de la démontrer dans ces cas seulement (la chose n'en devient d'ailleurs pas moins difficile).

* * *

Ainsi, soit $p: \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ une fibration de Hurewicz à connexion s. On choisit un point e_0 de $\mathscr{E}$ et on pose $b_0 = p(e_0)$, $\mathscr{F} = p^{-1}(b_0)$.

On choisit un homéomorphisme $(B^{n+1}, S^n) \to (I^{n+1}, \dot{I}^{n+1})$ de degré 1. Il y a avantage à considérer les éléments du groupe $\pi_{n+1} \times (\mathscr{B}, b_0)$ comme classes d'homotopie rel S^n des applications

$$u: (B^{n+1}, S^n) \to (\mathscr{B}, b_0) \qquad (1)$$

(voir remarque 1 de la leçon 25).

On constate facilement que *toute application* (1) *peut être relevée*, i.e. il existe une application continue $u^{\#}: \mathbb{B}^{n+1} \to \mathscr{E}$ pour laquelle on a $p \circ u^{\#} = u$. (Si l'on désigne, par exemple, les points de la boule $\mathbb{B}^{n+1}$ par $t\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^n$ et $t \in I$, on définit $u^{\#}$ par

$$u^{\#}(t\mathbf{x}) = s(u(0), u_{\mathbf{x}})(t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{S}^n, \ t \in I,$$

avec $u_{\mathbf{x}}$ le chemin $t \mapsto u(t\mathbf{x})$.)

Puisque $u(\mathbb{S}^n) = b_0$, on a $u^{\#}(\mathbb{S}^n) \subset \mathscr{F}$, i.e. on assimile la restriction $v = u^{\#}|_{\mathbb{S}^n}$ de $u^{\#}$ à $\mathbb{S}^n$ à l'application

$$v: \mathbb{S}^n \to \mathscr{F}.$$

Problème 2. Montrer que *la classe d'homotopie* $[v] \in \pi_n\mathscr{F}$ *de l'application* v *ne dépend ni du choix de l'application* u *dans* $\alpha = [u]$, *classe d'homotopie* rel $\mathbb{S}^n$, *ni du choix du relèvement* $u^{\#}$.

Sous l'hypothèse de $\mathscr{F}$ abélien (et connexe par arcs, en particulier), la formule

$$\partial\alpha = [v]$$

définit donc parfaitement une application

$$\partial: \pi_{n+1}(\mathscr{B}, b_0) \to \pi_n\mathscr{F}. \tag{2}$$

Problème 3. Démontrer que *l'application* (2) *est un homomorphisme.*

Problème 4. Construire ∂ pour $\mathscr{F}$ non abélien. [*Indication.* On a dans ce cas l'homomorphisme $\pi_{n+1}(\mathscr{B}, b_0) \to \pi_n(\mathscr{F}, e_0)$.]

Dans la suite, on suppose pour simplifier l'exposé qu'en plus de $\mathscr{F}$, chacun des espaces $\mathscr{B}$ et $\mathscr{E}$ est abélien (et, en particulier, connexe par arcs), auquel cas (2) s'écrit

$$\partial: \pi_{n+1}\mathscr{B} \to \pi_n\mathscr{E}.$$

Cette application jointe aux homomorphismes p_* et i_* induits par la fibration $p: \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ et l'injection $i: \mathscr{F} \to \mathscr{E}$ nous permet d'écrire la suite infinie à gauche

$$\ldots \to \pi_{n+1}\mathscr{B} \xrightarrow{\partial} \pi_n\mathscr{F} \xrightarrow{i_*} \pi_n\mathscr{E} \xrightarrow{p_*} \pi_n\mathscr{B} \to \ldots \tag{3}$$

de groupes et d'homomorphismes. On l'appelle *suite d'homotopie* de la fibration $p: \mathscr{E} \to \mathscr{B}$.

Problème 5. Démontrer que *la suite* (3) *est exacte.* [*Indication.* Les inclusions Im $\subset$ Ker sont évidentes. Pour avoir Ker $i_* \subset$ $\subset$ Im ∂ dans le groupe $\pi_n\mathscr{F}$, il suffit de dire que si l'on prolonge $f: \mathbb{S}^n \to \mathscr{F}$ en $F: \mathbb{B}^{n+1} \to \mathscr{E}$, alors $[f] = \partial[u]$, où $u = p \circ F: (\mathbb{B}^{n+1}, \mathbb{S}^{n+1}) \to (\mathscr{B}, b_0)$. Pareillement, si $p \circ f: \mathbb{S}^n \to \mathscr{B}$ est prolongeable pour $f: \mathbb{S}^n \to \mathscr{E}$ en l'application $G: \mathbb{B}^{n+1} \to \mathscr{B}$, alors la

formule

$$F(\mathbf{x}, t) = s(f(\mathbf{x}), G_\mathbf{x})(t), \quad \mathbf{x} \in S^n, \ t \in I,$$

avec $G_\mathbf{x}$ le chemin $t \mapsto G((1-t)\mathbf{x})$, définit à condition que $G(0) = b_0$ l'homotopie $F: S^n \times I \to \mathscr{E}$ qui relie f à l'application de la forme $S^n \to \mathscr{F}$. Si l'on trouve, pour le relèvement $u^\#: \mathscr{B}^n \to \mathscr{E}$ de $u: (B^{n+1}, S^n) \to (\mathscr{B}, b_0)$, l'application $g: B^n \to \mathscr{F}$ qui coïncide avec $u^\#$ sur S^n, alors la formule

$$f([\mathbf{x}, t]_\varepsilon) = \begin{cases} u^\#(t\mathbf{x}) & \text{si } \varepsilon = +1, \\ g(t\mathbf{x}) & \text{si } \varepsilon = -1, \end{cases} \quad \mathbf{x} \in S^n, \quad t \in I$$

(où le point $[\mathbf{x}, t]_\varepsilon$ de l'hémisphère $\varepsilon x^{n+1} \geqslant 0$ de S^{n+1} est sur le méridien d'un point $\mathbf{x}$ de l'équation S^n et en est distant de $(1 - t)\frac{\pi}{2}$) définit parfaitement une application continue $f: S^{n+1} \to \mathscr{E}$ qui jouit de la propriété suivante : l'élément $[p \circ f]$ du groupe $\pi_{n+1}\mathscr{B}$ est donné par l'application u. Aussi, $\operatorname{Ker} p_* \subset \operatorname{Im} i_*$ dans le groupe $\pi_n\mathscr{E}$, et $\operatorname{Ker} \partial \subset \operatorname{Im} p_*$ dans le groupe $\pi_{n+1}\mathscr{B}$.]

Problème 6. Démontrer l'affirmation analogue pour $\mathscr{E}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{F}$ non abéliens. [*Indication.* Voir problème 4.]

Soit $f: \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ un morphisme de $p: \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ dans $p': \mathscr{E}' \to \mathscr{B}'$. Cela signifie par définition (voir leçon 1) que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{E} & \xrightarrow{f} & \mathscr{E}' \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ \mathscr{B} & \xrightarrow{g} & \mathscr{B}' \end{array}$$

est commutatif. Il est clair que si $u^\#: B^{n+1} \to \mathscr{E}$ est un relèvement de $u: (B^{n+1}, S^n) \to (\mathscr{B}, b_0)$, alors $f \circ u^\#$ l'est pour $g \circ u$, et f induit l'application (notée encore f) de la fibre $\mathscr{F}$ de $p: \mathscr{E} \to \mathscr{B}$ au-dessus de b_0 dans la fibre $\mathscr{F}'$ de $p': \mathscr{E}' \to \mathscr{B}'$ au-dessus de $b_0' = g(b_0)$. Aussi, les applications v et v' construites pour u et $u' = g \circ u$ sont liées par l'égalité $v' = f \circ v$. Or, si $\alpha = [u]$, on a par définition

$$g_*\alpha = [u'], \ \partial\alpha = [v], \ \partial(g_*\alpha) = [v'] \text{ et } f_*(\partial\alpha) = [f \circ v],$$

ce qui prouve que $\partial(g_*\alpha) = f_*(\partial\alpha)$, i.e. que *le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \pi_{n+1}\mathscr{B} & \xrightarrow{\partial} & \pi_n\mathscr{F} \\ {\scriptstyle g_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_*} \\ \pi_{n+1}\mathscr{B}' & \xrightarrow{\partial} & \pi_n\mathscr{F}' \end{array}$$

est commutatif.

Ce résultat joint à l'affirmation du problème 3 (dans le cas particulier d'un groupe de Lie connexe par arcs $\mathscr{G}$ et de son sous-groupe fermé connexe par arcs $\mathscr{H}$) prouve c de la leçon 25.

Passons à l'affirmation d. On a besoin de la suite d'homotopie du fibré $\tau_{S^m} = (SO(m+1), p, S^m)$, qui s'écrit en l'occurrence

(4) $$\ldots \rightarrow \pi_{n+1}S^m \xrightarrow{\partial} \pi_n SO(m) \xrightarrow{i_*} \pi_n SO(m+1) \xrightarrow{p_*} \pi_n S^m \rightarrow \ldots$$

On s'en sert à condition d'être suffisamment renseigné sur les groupes $\pi_n S^m$.

Voyons ce qu'il en est pour $n < m$.

* * *

Conformément à la proposition 2 de III.26, chaque classe d'homotopie des applications $S^n \rightarrow S^m$ contient $f: S^n \rightarrow S^m$ différentiable. D'autre part, si $n < m$, le théorème de Sard (voir leçon III.15) exclut manifestement la surjectivité de f, si bien qu'on l'assimile à l'application de S^n dans la sphère épointée $S^m \setminus \{x_0\}$, x_0 étant un point, et, partant, à l'application $S^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ de la sphère S^n dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^m$ (homéomorphe à $S^m \setminus \{x_0\}$). Mais chaque application $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est évidemment homotope à une application constante (disons, en le point 0; on définit l'homotopie reliant la dernière application à f par $F(x) = tf(x)$, où $x \in S^n$, $t \in I$). Ainsi, *chaque application $S^n \rightarrow S^m$ est homotope pour $n < m$ à une application constante*, i.e.

(5) $$\pi_n S^m = 0, \quad n < m.$$

Cf. leçon 3 (démonstration de la propriété de S^n, $n \geqslant 2$, d'être simplement connexe).

* * *

Ce fait à lui seul permet d'établir certaines propriétés importantes des groupes $\pi_n SO(m)$.

En effet, si $n+1 < m$ (*a fortiori* $n < m$), le tronçon limité par $\pi_{n+1}S^m$ et $\pi_n S^m$ de la suite (4) s'écrit en raison de (5):

$$0 \rightarrow \pi_n SO(m) \xrightarrow{i_*} \pi_n SO(m+1) \rightarrow 0.$$

Dire que cette suite partielle est exacte équivaut à dire que l'homomorphisme i_* est un isomorphisme, ce qui prouve que *si $n < m-1$, l'homomorphisme*

$$i_*: \pi_n SO(m) \rightarrow \pi_n SO(m+1)$$

est un isomorphisme.

Ainsi, on a pour tout $n \geqslant 1$ les identifications naturelles

(6) $$\pi_n SO(n+2) = \pi_n SO(n+3) = \ldots,$$

i.e. *les groupes* $\pi_n SO(n+k)$, $k \geqslant 2$, *se stabilisent.* On appelle *n-ième groupe stable d'homotopie des groupes orthogonaux* leur valeur commune (6) et on emploie le symbole $\pi_n SO$.

Le groupe $\pi_n SO(n+1)$, prédécesseur des groupes stables, est dit *métastable.* Comme $\pi_n S^{n+1} = 0$, *l'homomorphisme*

$$i_*: \pi_n SO(n+1) \to \pi_n SO \tag{7}$$

est un épimorphisme.

Il y a une trentaine d'années, Bott a calculé les groupes $\pi_n SO$ par un procédé fort ingénieux qui relève de la *théorie de Morse.* (Cette théorie établit une liaison entre les caractéristiques topologiques d'une variété différentiable $\mathscr{X}$, d'une part, et le nombre et le type des points critiques des fonctions différentiables données sur $\mathscr{X}$, de l'autre.) Il se trouve que *ces groupes dépendent seulement du résidu modulo* 8 *de n* (*théorème de périodicité de Bott*) et sont régis par la table suivante:

n mod 8	0	1	2	3	4	5	6	7
π_n SO	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$

où $\mathbb{Z}$ est un groupe cyclique libre et $\mathbb{Z}/2$ un groupe d'ordre 2.

On connaît d'autres procédés qui donnent ce résultat sans s'appuyer sur la théorie de Morse, mais leur complexité nous oblige à les passer sous silence. [Dans sa *Morse theory* (Princeton, Univ. Press, 1963), J. Milnor expose brillamment la théorie en question, ainsi que la démonstration de Bott du théorème de périodicité.]

La suite d'homotopie

$$\ldots \to \pi_{n+1} S^{2m+1} \to \pi_n U(m) \to \pi_n U(m+1) \to \pi_n S^{2m+1} \to \ldots$$

du fibré $\tau^U_{S^{2m+1}} = (U(m+1), p^U, S^{2m+1})$ étant exacte entraîne de même que *les groupes* $\pi_n U(m)$, $n < 2m$, *se stabilisent eux aussi.* La notation correspondante est $\pi_n U$.

Le *théorème de périodicité de Bott pour les groupes unitaires* dit que les groupes $\pi_n U$ *ne dépendent que du résidu modulo* 2 *de n*, si bien qu'ils sont isomorphes pour n pair au groupe $\pi_0 U(1) = \{1\}$ (pour le groupe π_0 voir problème 4 de la leçon 25), et ils le sont à $\pi_1 U(1) = \pi_1 S^1 = \mathbb{Z}$ pour n impair (voir leçon 3). Ainsi, selon Bott

$$\pi_n U = \begin{cases} 0 & \text{pour } n \text{ pair,} \\ \mathbb{Z} & \text{pour } n \text{ impair.} \end{cases}$$

Bott a de même calculé le groupe métastable $\pi_{2m} U(m)$ qui se trouve être *un groupe cyclique d'ordre m*! :

$$\pi_{2m} U(m) = \mathbb{Z}/m!.$$

Problème 7. Soit

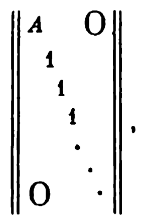
$$\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{G}_n \subset \mathcal{G}_{n+1} \subset \ldots$$

une suite de groupes topologiques ordonnée par inclusion. Sa réunion $\mathcal{G}$ est manifestement un groupe. On définit sur $\mathcal{G}$ une topologie en supposant $U \subset \mathcal{G}$ ouvert si et seulement si l'intersection $U \cap \mathcal{G}_n$ l'est dans $\mathcal{G}_n$ quel que soit $n \geqslant 1$. Vérifier que

1° cette hypothèse munit bien $\mathcal{G}$ d'une topologie;

2° $\mathcal{G}$ est un groupe topologique par rapport à cette topologie.

Si $\mathcal{G}_n = \mathrm{SO}(n)$, le groupe $\mathcal{G}$ est désigné par SO, et il l'est par U lorsque $\mathcal{G}_n = \mathrm{U}(n)$. On estime que les éléments de SO et U sont les matrices infinies de la forme



où A appartient à $\mathrm{SO}(n)$ ou à $\mathrm{U}(n)$ (le nombre n étant quelconque). Montrer que *quel que soit $n \geqslant 1$, les groupes stables d'homotopie $\pi_n\mathrm{SO}$ et $\pi_n\mathrm{U}$ ne sont (à un isomorphisme naturel près) autres que les groupes d'homotopie de* SO *et* U (ce qui justifie les symboles employés).

* * *

Voyons ce qu'il advient pour les groupes $\pi_n S^m$, avec $n = m$. Contrairement au cas $m < n$, le problème (qui est loin d'être trivial) exige des efforts longs et pénibles.

Soit $\mathscr{X}$ une variété séparée compacte différentiable et orientée de dimension n. On définit pour toute application différentiable (voire continue) $f\colon \mathscr{X} \to S^n$ (voir leçon III.26) son degré $\deg f$ qui dépend de la classe d'homotopie $\alpha = [f]$ seule (on rappelle que la sphère S^n est supposée posséder une orientation naturelle; voir leçon 25, ou, plus précisément, le texte entre les problèmes 14 et 15). Aussi, la formule

$$\deg \alpha = \deg f$$

définit parfaitement une application

$$\deg\colon [\mathscr{X}, S^n] \to \mathbb{Z}, \tag{8}$$

avec $[\mathscr{X}, S^n]$ l'ensemble des classes d'homotopie des applications continues $\mathscr{X} \to S^n$.

Proposition 1. *Si la variété $\mathscr{X}$ est connexe, l'application* (8) *est bijective.*

D é m o n s t r a t i o n. On va prouver que (8) est surjective, puis qu'elle est injective.

Surjectivité. Comme il existe des difféomorphismes $\varphi: S^n \to S^n$ de degré -1 (c'est le cas, par exemple, de la symétrie par rapport à un hyperplan quelconque passant par l'origine des coordonnées) et puisque $\deg(\varphi \circ f) = -\deg f$, il suffit de construire une application $f: \mathscr{X} \to S^n$ de degré m, $m > 0$ quelconque.

Soient $(U_1, h_1), \ldots, (U_m, h_m)$ des cartes positivement orientées de $\mathscr{X}$ telles que

1) leurs supports $U_1, \ldots, U_m$ soient disjoints deux à deux;

2) chaque application $h_1, \ldots, h_m$ constitue un difféomorphisme sur la boule $\mathring{B}^n$.

On suppose de plus que $\chi: (B^n, S^{n-1}) \to (S^n, s_0)$ est une application continue, difféomorphisme de degré 1 de $\mathring{B}^n$ sur la sphère épointée $S^n \setminus \{s_0\}$ (voir problème 15 et remarque 1 de la leçon 25). La formule

$$f(p) = \begin{cases} (\chi \circ h_i)(p) & \text{si } p \in U_i, \ i = 1, \ldots, m, \\ s_0 & \text{si } p \notin U_1 \cup \ldots \cup U_m, \end{cases}$$

définit bien une application différentiable $f: \mathscr{X} \to S^n$ qui jouit des propriétés suivantes:

a. Le point $x_0 = \chi(0)$ est une valeur régulière de f.

b. L'image réciproque $f^{-1}(x_0)$ de x_0 est formée de m points

$$p_1 = h_1^{-1}(0), \ldots, p_m = h_m^{-1}(0).$$

c. Pour tout $i = 1, \ldots, m$, la différentielle $(df)_{p_i}$ en p_i de l'application f est l'application linéaire non dégénérée $T_{p_i}\mathscr{X} \to T_{x_0}S^n$ d'espaces vectoriels orientés qui conserve l'orientation (le jacobien de f en p_i est positif).

Selon la proposition 1 de III.26, on a donc $\deg f = m$.

On note que la connexité de la variété $\mathscr{X}$ ne joue ici aucun rôle.

Injectivité. A la lumière des résultats de III.26, il suffit de démontrer que *deux applications différentiables $f, g: \mathscr{X} \to S^n$ de même degré sont homotopes*, i.e. il existe une application continue

$$F: \mathscr{X} \times I \to S^n, \quad I = [0, 1],$$

de la variété $\mathscr{Z} = \mathscr{X} \times I$ à bord $\partial\mathscr{Z} = (\mathscr{X} \times 0) \sqcup (\mathscr{X} \times 1)$ dans la sphère S^n, qui coïncide sur $\partial\mathscr{Z}$ avec l'application $(f, g): \partial\mathscr{Z} \to S^n$ définie par la formule

$$(f, g)(p, t) = \begin{cases} f(p) & \text{si } t = 0, \\ g(p) & \text{si } t = 1, \end{cases} \quad p \in \mathscr{X}.$$

On en tient compte et on note que toutes les cartes de la forme

$$(U \times I, h \times \mathrm{id}) = (U \times I, x^1, \ldots, x^n, t),$$

avec $(U, h) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ une carte quelconque de la variété $\mathscr{X}$, sont positivement compatibles (la chose est évidente) et recou-

vrent entièrement la variété $\mathscr{D} = \mathscr{X} \times I$, i.e. elles en forment l'atlas d'orientation. Aussi définissent-elles une orientation sur $\mathscr{D}$.

Cette orientation de $\mathscr{D}$ est notée $\mathfrak{o}$ pour n pair et $-\mathfrak{o}$ dans le cas contraire. (Ainsi, $\mathfrak{o}$ est une orientation définie pour tout n par l'atlas $\{(U \times I, t, x^1, \ldots, x^n)\}$.)

Conformément à une construction générale de III.27, $\mathfrak{o}$ induit l'orientation du bord $\partial\mathscr{D}$ de $\mathscr{D} = \mathscr{X} \times I$, donc celle de ses composantes $\mathscr{X} \times 0$ et $\mathscr{X} \times 1$.

Problème 8. Montrer que $\mathfrak{o}$ *induit sur la variété* $\mathscr{X} \times 1$ (*identifiée de façon naturelle à* $\mathscr{X}$) *l'orientation donnée de* $\mathscr{X}$ *et l'orientation opposée sur* $\mathscr{X} \times 0$.

On écrit de manière conventionnelle mais fort suggestive:

(9) $$\partial (\mathscr{X} \times I) = \mathscr{X} \times I - \mathscr{X} \times 0.$$

La variété $\partial (\mathscr{X} \times I)$ étant orientée, on définit deg (f, g) de l'application (f, g). Comme toute valeur régulière $\mathbf{x}_0$ de (f, g) est évidemment celle de f et g, et que de plus

$$(f, g)^{-1} (\mathbf{x}_0) = (f^{-1}\mathbf{x}_0 \times 0) \sqcup (g^{-1}\mathbf{x}_0 \times 1),$$

il découle de suite de (9), en vertu de la proposition 1 de III.26, que *le degré de l'application* (f, g) *est égal à la différence du degré de* f *et du degré de* g:

$$\deg (f, g) = \deg g - \deg f.$$

Par conséquent, la condition $\deg f = \deg g$ fait que ce degré est $= 0$.

Aussi, l'injectivité de (8) découle immédiatement de la proposition 2 ci-dessous. □

Problème 9. Soit $\mathscr{X}$ une variété séparée compacte connexe et orientée de dimension n à bord $\partial\mathscr{X} \neq \varnothing$, et soit $[(\mathscr{X}, \partial\mathscr{X}), (\mathbb{S}^n, s_0)]$ l'ensemble des classes d'homotopie rel $\partial\mathscr{X}$ des applications continues $(\mathscr{X}, \partial\mathscr{X}) \to (\mathbb{S}^n, s_0)$. Définir l'application

(10) $$\deg: [(\mathscr{X}, \partial\mathscr{X}), (\mathbb{S}^n, s_0)] \to \mathbb{Z}$$

et démontrer que lorsque le bord $\partial\mathscr{X}$ de $\mathscr{X}$ est difféomorphe à la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$, il s'agit d'une *bijection*. [*Indication.* Quand on recouvre par recollement le bord $\partial\mathscr{X}$ par a boule $\mathbb{B}^n$, il vient une variété n-dimensionnelle sans bord justiciable de la proposition 1.]

Remarque 1. L'affirmation du problème 9 implique que *toutes les applications* $\chi: (I^n, \dot{I}^n) \to (\mathbb{S}^n, s_0)$ *de degré* 1 *sont homotopes relativement à* $\dot{I}^n$ (elles définissent un même élément du groupe $\pi_n (\mathbb{S}^n, s_0)$).

Voir remarque 2 de la leçon 25.

Problème 10. Démontrer que *l'application* (10) *est toujours bijective* (pour toute variété connexe $\mathscr{X}$ à bord $\partial\mathscr{X}$ quelconque).

Proposition 2. *Soit $\mathscr{D}$ une variété séparée paracompacte connexe de dimension $n+1$ à bord $\partial\mathscr{D} \neq \varnothing$, et soit*

$$f: \partial\mathscr{D} \to S^n$$

une application différentiable propre telle que

$$\deg f = 0.$$

Il existe une application continue $F: \mathscr{D} \to S^n$ qui prolonge f, i.e. on a

$$f = F|_{\partial\mathscr{D}}.$$

C'est le *théorème de prolongement de Hopf.*

Bien que l'idée à la base de la démonstration soit fort simple, on a besoin de plusieurs constructions de caractère topologique général qui sont très intéressantes en elles-mêmes.

* * *

Soit $\mathscr{X}$ un espace topologique séparé normal, et soient W et V ses ouverts, $\overline{W} \subset V$.

Lemme 1. *Il existe une fonction continue $f: \mathscr{X} \to I$, $I = [0, 1]$, égale à 1 sur $\overline{W}$ et à 0 à l'extérieur de V.*

Ce lemme s'appelle *théorème d'Urysohn* (ou encore *grand lemme d'Urysohn*). Nous en avons parlé dans la remarque 4 de III.24. La fonction f y figurant est la *fonction d'Urysohn* du couple (V, W); cf. définition 1 de III.14. Chose à noter: on n'exige pas en général que l'ensemble des points en lesquels f est égale à 1 (resp. à 0) coïncide avec $\overline{W}$ (resp. avec $\mathscr{X} \setminus V$).

S'agissant de $\mathscr{X}$ métrisable, la fonction d'Urysohn f est donnée par

$$f(x) = \frac{\rho(x, \mathscr{X} \setminus V)}{\rho(x, \overline{W}) + \rho(x, \mathscr{X} \setminus V)}, \quad x \in \mathscr{X}, \tag{11}$$

où ρ est la métrique sur $\mathscr{X}$ et $\rho(x, C)$, avec $C \subset \mathscr{X}$ un ensemble fermé arbitraire, la distance

$$\rho(x, C) = \inf_{y \in C} \rho(x, y)$$

du point x à C. (La fonction $f(x)$ de (11) est égale à 1 si et seulement si $x \in \overline{W}$.) Ainsi, *le théorème d'Urysohn est évidemment valable pour $\mathscr{X}$ métrisable.* Le cas de $\mathscr{X}$ métrisable s'étend en principe à toutes les applications (car un théorème extrêmement difficile de Stone dit qu'*on munit d'une métrique tout espace séparé paracompact*), si bien qu'on n'a pas à démontrer le théorème d'Urysohn dans le cas général.

Lemme 2. *Soient $\mathscr{X}$ un espace séparé normal, et C sa partie fermée. Toute application continue $f: C \to \mathbb{R}^n$ de C dans $\mathbb{R}^n$ est prolongeable à $\mathscr{X}$ tout entier, i.e. il existe une application continue $F: \mathscr{X} \to \mathbb{R}^n$ telle que*

$$f = F|_C.$$

D é m o n s t r a t i o n. Il est clair qu'il suffit de démontrer le lemme pour $n = 1$ (on l'applique pour tout n à chaque composante de f) sous la seule hypothèse $|f| < 1$ (l'axe $\mathbb{R}$ est homéomorphe à l'intervalle $]-1, 1[$).

On raisonne par récurrence et on définit sur C les fonctions f_n, $n \geqslant 1$, en posant $f_0 = f$ et

$$f_{n+1} = f_n + \frac{2^n}{3^{n+1}}(2g_n - 1),$$

avec g_n la fonction d'Urysohn du couple

$$\left(\left[f_n < \frac{2^n}{3^{n+1}}\right], \left[f_n < -\frac{2^n}{3^{n+1}}\right]\right)$$

ou, plus précisément, la restriction de cette dernière fonction à C. (On désigne par le symbole $[f < a]$, f étant une fonction et a un nombre, l'ensemble des points en lesquels f prend une valeur inférieure à a.)

Problème 11. Démontrer par récurrence que

$$|f_n(x)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ pour tout point } x \in \mathscr{X}.$$

[*Indication*. Si $f_n(x) \leqslant -\frac{2^n}{3^{n+1}}$, on a $f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{2^n}{3^{n+1}}$, et si $f_n(x) \geqslant \frac{2^n}{3^{n+1}}$, alors $f_{n+1}(x) = f_n(x) - \frac{2^n}{3^{n+1}}$.]

Ainsi, f_n tend vers 0 uniformément sur C.

Soit

$$F_n = -\frac{2^n}{3^{n+1}}(2g_n - 1).$$

Comme $|F_n| \leqslant \frac{2^n}{3^{n+1}}$ et que la suite numérique de terme général $\frac{2^n}{3^{n+1}}$ est évidemment convergente, la série fonctionnelle

$$F_0 + F_1 + \ldots + F_n + \ldots$$

converge partout sur $\mathscr{X}$ et sa somme F est une fonction continue. La somme partielle $F_0 + F_1 + \ldots + F_n$ de la dernière série est manifestement égale sur C à $f_0 - f_n = f - f_n$, si bien que $F = f$ sur C. □

Le lemme 2 s'appelle d'ordinaire *théorème de Tietze* (du nom du mathématicien qui a été le premier à le démontrer pour $\mathscr{X}$ métrisable ; le cas général a été établi par Urysohn). On note que sa dé-

monstration fait appel au théorème d'Urysohn, si bien qu'à vrai dire nous n'avons prouvé le lemme 2 que pour $\mathscr{X}$ métrisable (dans le cas Tietze).

* * *

Un autre lemme nécessaire a trait aux difféomorphismes de l'espace $\mathbb{R}^n$.

Soit $\text{Diff}_0^+ \mathbb{R}^n$ le groupe des difféomorphismes $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ conservant l'orientation (difféomorphismes de degré 1) qui laissent fixe le point 0.

Lemme 3. *Quel que soit le difféomorphisme* $h \in \text{Diff}_0^+\mathbb{R}^n$, *on trouve une homotopie*

(12) $$H: \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n$$

telle que

a) *l'application*

$$h_t: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x} \mapsto H(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

appartienne pour tout $t \in I$ *au groupe* $\text{Diff}_0^+\mathbb{R}^n$ (*et laisse*, en particulier, *fixe le point* 0);

b) *on ait les égalités*

$$h_0 = \text{id}, \quad h_1 = h.$$

[Si l'on munit $\text{Diff}_0^+\mathbb{R}^n$ d'une topologie adéquate, l'application $t \mapsto h_t$ est un chemin de ce groupe qui joint l'unité id à l'élément h. Ainsi, le lemme 3 affirme *la connexité par arcs de* $\text{Diff}_0^+ \mathbb{R}^n$.]

D é m o n s t r a t i o n. Le sous-groupe $\text{GL}^+(n; \mathbb{R})$ du groupe considéré est connexe par arcs (voir leçon III.11), si bien qu'il suffit de démontrer l'existence dans $\text{Diff}_0^+ \mathbb{R}^n$ d'un chemin (12) qui joint le difféomorphisme h à sa différentielle $A = (dh)_0$ au point 0 (par suite de l'identification $T_0\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ et de l'égalité $h(0) = 0$, est une application linéaire $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ conservant l'orientation).

Par définition,

$$h(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + s(\mathbf{x})\,\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

avec $s: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application différentiable dotée de la propriété $s(0) = 0$. Aussi, on a pour $t \neq 0$

$$t^{-1}h(t\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + s(t\mathbf{x})\,\mathbf{x}.$$

Comme $s(0) = 0$, la formule

$$H(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} t^{-1}h(t\mathbf{x}) & \text{si } t \neq 0, \\ A\mathbf{x} & \text{si } t = 0, \end{cases}$$

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $t \in I$, définit une application continue (et même différentiable) (12) pour laquelle $h_0 = A$ et $h_1 = h$. La démonstration est achevée si l'on dit que quel que soit $t = 0$, l'application h_t: $\mathbf{x} \mapsto t^{-1}h(t\mathbf{x})$ appartient manifestement au groupe $\text{Diff}_0^+ \mathbb{R}^n$. □

La boule ouverte $\mathring{B}^n$ est difféomorphe à l'espace $\mathbb{R}^n$, d'où la validité du lemme 3 pour le groupe $\mathrm{Diff}_0^+ \mathring{B}^n$ de tous les difféomorphismes $\mathring{B}^n \to \mathring{B}^n$ conservant l'orientation qui laissent fixe le point 0.

* * *

Fort de ces résultats, on passe à la

D é m o n s t r a t i o n de la proposition 2. La condition $\deg f = 0$ revient à dire que l'image réciproque $f^{-1}x_0$ d'un point $x_0 \in S^n$ est formée des points en nombre pair tels qu'une moitié des jacobiens de f soit positive en ces points et l'autre, négative.

Problème 12. Démontrer l'existence

1° des arcs inclus disjoints Q_i joignant chaque point du premier type de $\mathscr{D}$ à un point du second type qui sont entièrement, sauf leurs extrémités, dans l'intérieur $\mathring{\mathscr{D}}$ de la variété $\mathscr{D}$ et dont les extrémités ne touchent pas le bord $\partial\mathscr{D}$;

2° de leurs voisinages disjoints U_i (« tubes longeant Q_i »);

3° des difféomorphismes

$$\varphi_i : \mathring{B}^n \times I \to U_i$$

qui appliquent le segment $0 \times I$ sur l'arc Q_i, le bord $(\mathring{B}^n \times 0) \cup (\mathring{B}^n \times 1)$ du produit $\mathring{B}^n \times I$ sur l'intersection $U_i \cap \partial\mathscr{D}$, tels que les ensembles

$$V_i^{(0)} = \varphi_i(\mathbb{R}^n \times 0), \quad V_i^{(1)} = \varphi_i(\mathbb{R}^n \times 1)$$

soient pour tout i les voisinages (dans $\partial\mathscr{D}$) des extrémités des Q_i qui s'appliquent difféomorphiquement par f sur un voisinage W_i du point x_0.

Les jacobiens des difféomorphismes $f|_{V_i^{(0)}}$ et $f|_{V_i^{(1)}}$ sont de signes contraires par hypothèse. C'est également la propriété des difféomorphismes $\varphi_i|_{\mathring{B}^n \times 0}$ et $\varphi_i|_{\mathring{B}^n \times 1}$, si bien que le jacobien du difféomorphisme $h_i : \mathring{B}^n \to \mathring{B}^n$ défini par

$$h_i = \left(\varphi_i|_{\mathring{B}^n \times 0}\right)^{-1} \circ \left(f|_{V_i^{(0)}}\right)^{-1} \circ \left(f|_{V_i^{(1)}}\right) \circ \left(\varphi_i|_{\mathring{B}^n \times 1}\right)$$

est positif (on identifie ici $\mathring{B}^n \times 0$ et $\mathring{B}^n \times 1$ à $\mathring{B}^n$). De plus, $h_i(0) = 0$ par construction. Par conséquent, $h_i \in \mathrm{Diff}_0^+ \mathring{B}^n$, et il existe dans $\mathrm{Diff}_0^+ \mathring{B}_0^n$ le chemin

$$H_i : \mathring{B}^n \times I \to \mathring{B}^n$$

qui joint id à h_i. Ce faisant, on définit sur le voisinage $U = \bigcup U_i$ de l'ensemble fermé $Q = \bigcup Q_i$ l'application $g: U \to S^n$ donnée sur U_i par

$$g|_{U_i} = \left(f|_{V_i^{(0)}}\right) \circ \left(\varphi_i|_{\mathring{B}^n \times 0}\right) \circ H_i \circ \varphi_i^{-1}.$$

L'application g est continue. Elle coïncide sur $U \cap \partial\mathscr{D} = \bigcup (V_i^{(0)} \cup \cup V_i^{(1)})$ avec f et jouit de la propriété $g^{-1}(\mathbf{x}_0) = Q$.

Soit V un voisinage de Q tel que $\bar{V} \subset U$ (on pose, par exemple, $V = \bigcup \varphi_i (\mathring{B}^n_{1/2} \times I)$, et soit $C = \bar{V} \cup \partial\mathscr{D}$. Il est clair que la formule

$$F_1(p) = \begin{cases} g(p) & \text{si } p \in \bar{V}, \\ f(p) & \text{si } p \in \partial\mathscr{D} \end{cases}$$

définit une application continue $F_1: C \to S^n$ qui prolonge $f: \partial\mathscr{D} \to \to S^n$.

Aux termes d'un théorème de Dieudonné (voir remarque 4 de la leçon III.24), la variété $\mathscr{D}$ est normale. Il y a plus. $\mathscr{D}$ étant connexe et paracompacte vérifie le deuxième axiome de dénombrabilité (remarque 2 de leçon III.24) et est donc plongeable dans $\mathbb{R}^N$ (théorème 1 de la leçon III.14). Par conséquent, $\mathscr{D}$ est de plus métrisable. [Le résultat de Dieudonné est cité sans démonstration. Quant au théorème 1 de III.14, on l'a établi pour les variétés compactes sans bord. Aussi, nos raisonnements sont à vrai dire lacunaires. Le cas $\mathscr{D} = \mathscr{X} \times I$, $\mathscr{X}$ étant une variété compacte sans bord, est par contre complètement justifié.]

Ce faisant, on considère la restriction

$$F' = F_1|_{C \setminus V}$$

de l'application F_1 à l'ensemble fermé $C \setminus V \subset \mathscr{D} \setminus V$. Cette application laisse certes fixe le point $\mathbf{x}_0$, i.e. c'est une application dans $S^n \setminus \{\mathbf{x}_0\}$. La sphère épointée $S^n \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ est homéomorphe à l'espace $\mathbb{R}^n$, si bien que F' est prolongeable en vertu du théorème de Tietze (il est déjà connu qu'il s'applique en l'occurrence) en une application continue

$$F_2 : \mathscr{D} \setminus V \to S^n \setminus \{\mathbf{x}_0\}.$$

On pose

$$F(p) = \begin{cases} F_1(p) & \text{si } p \in C, \\ F_2(p) & \text{si } p \in \mathscr{D} \setminus V, \end{cases}$$

et on obtient évidemment le prolongement voulu $F: \mathscr{D} \to S^n$ de l'application f. □

La proposition 2 se trouve démontrée, ainsi que la proposition 1.

LEÇON 27

Groupe $\pi_n S^n$. — Théorème de classe caractéristique. — Sa généralisation. — Groupes d'homotopie d'un espace de revêtement. — Fibration de Hopf et groupe $\pi_3 S^2$. — Groupes $\pi_{n+1} S^n$. — Opération $\circ$ dans les groupes d'homotopie des sphères. — Calcul de la classe d'homotopie de l'application $p_1^U \circ T_{n+1}^U$. — Liaison avec les K_C-groupes.

Si $\mathscr{X} = S^n$, l'ensemble $[\mathscr{X}, S^n]$ est le groupe $\pi_n S^n$, et l'application (8) de la leçon 26 devient donc l'application

(1) $$\deg : \pi_n S^n \to \mathbb{Z}$$

de groupes.

Problème 1. Montrer que *l'application* (1) *est un isomorphisme.*

Ainsi, $\pi_n S^n$ *est un groupe cyclique libre.*

Soit ι_n la classe d'homotopie [id] de l'application identique $S^n \to S^n$. Comme $\deg \iota_n = 1$, *l'élément* ι_n *est un générateur du groupe* $\pi_n S^n$.

Si l'on considère les éléments de $\pi_n S^n$ comme classes d'homotopie rel $\dot{I}^n$ des applications $(I^n, \dot{I}^n) \to (S^n, s_0)$, ι_n est la classe $[\chi]$ de l'application χ du problème 15 de la leçon 25.

* * *

Ainsi, le groupe $\pi_{n+1} S^{n+1}$ de la suite d'homotopie

$$\ldots \to \pi_{n+1} S^{n+1} \xrightarrow{\partial} \pi_n SO(n+1) \xrightarrow{i_*} \pi_n SO \to 0, \quad \pi_n SO = \pi_n SO(n+2)$$

du fibré $\tau_{S^{n+1}} = (SO(n+2), p, S^{n+1})$ constitue un groupe cyclique libre de générateur ι_{n+1}, et le noyau de l'épimorphisme i_*: $\pi_{n+1} SO(n+2) \to \pi_n SO$ est engendré par l'élément $\partial\iota_{n+1}$.

Proposition 1. *L'élément* $\partial\iota_{n+1}$ *est la classe caractéristique du fibré* $\tau_{S^{n+1}}$, *i. e.*

$$\partial\iota_{n+1} = [T_{n+1}],$$

avec $T_{n+1}: S^n \to SO(n+1)$ *une application caractéristique.*

D é m o n s t r a t i o n. Conformément à la remarque 1 de la leçon 25, le groupe $\pi_{n+1}(\mathscr{X}, x_0)$ est supposé contenir pour tout espace topologique pointé $(\mathscr{X}, x_0)$ non seulement les classes d'homotopie rel s_0 des applications continues f: $(S^{n+1}, s_0) \to (\mathscr{X}, x_0)$, avec s_0 un point fixe de la sphère S^{n+1} (dans la leçon 25, nous avons fait l'hypothèse de $s_0 = e_1$, mais on peut également supposer que $s_0 =$

$= e_{n+1}$), mais aussi les classes d'homotopie rel S^n des applications continues $g\colon (E^{n+1}_{(-)}, S^n) \to (\mathscr{X}, x_0)$, où $E^{n+1}_{(-)}$ est l'hémisphère $x^{n+1} \leqslant 0$ de S^{n+1} et S^n son bord (équateur de S^{n+1}). Ce faisant, si $\alpha \in \pi_{n+1}(\mathscr{X}, x_0)$ est défini par $f\colon (S^{n+1}, s_0) \to (\mathscr{X}, x_0)$, il l'est de même par $g = f \circ \chi\colon (E^{n+1}_{(-)}, S^n) \to (\mathscr{X}, x_0)$, où χ est une application $(E^{n+1}_{(-)}, S^n) \to (S^{n+1}, s_0)$ quelconque qui applique homéomorphiquement, sans en renverser l'orientation, l'hémisphère ouvert $\mathring{E}^{n+1}_{(-)} = E^{n+1}_{(-)} \setminus S^n$ sur la sphère épointée $S^{n+1} \setminus \{s_0\}$.

C'est en particulier juste si $\mathscr{X} = S^{n+1}$ et $x_0 = s_0 = e_{n+1}$, auquel cas le générateur ι_{n+1} du groupe $\pi_{n+1} S^{n+1} = \pi_{n+1}(S^{n+1}, s_0)$ est précisément la classe d'homotopie $[\chi]$ de l'application χ. Aussi (voir la construction de l'homomorphisme ∂ de la leçon 26), il faut, pour avoir l'application $S^n \to SO(n+1)$ de la classe $\partial\iota_{n+1}$, construire

$$\chi'\colon (E^{n+1}_{(-)}, S^n) \to (SO(n+2), SO(n+1)),$$

relèvement de χ (i.e. on a $p \circ \chi' = \chi$), puis sa restriction à S^n:

$$\partial\iota_{n+1} = [\chi'|_{S^n}]. \tag{2}$$

On adopte donc pour χ l'application

$$(E^{n+1}_{(-)}, S^n) \to (S^{n+1}, e_{n+1}), \tag{3}$$

qui laisse fixe $-e_{n+1}$ et transforme tout autre vecteur $x \in E^{n+1}_{(-)}$ en le vecteur $\chi(x) \in S^{n+1}$ du plan défini par x, e_{n+1} qui forme avec $-e_{n+1}$ un angle deux fois plus grand (chaque point distinct du pôle $-e_{n+1}$ de l'hémisphère $E^{n+1}_{(-)}$ est déplacé par χ sur son méridien de façon que sa distance au pôle augmente deux fois; χ jouit incontestablement de toutes les propriétés voulues). On définit l'application χ' par les formules

$$\chi'(x) = \begin{cases} s_{(-)}(\chi(x)) & \text{si } \chi(x) \in E^{n+1}_{(-)}, \\ s_{(+)}(\chi(x))\, T_{n+1}(\chi_0(x)) & \text{si } \chi(x) \in E^{n+1}_{(+)}, \end{cases} \qquad x \in E^{n+1}_{(-)}, \tag{4}$$

avec $s_{(-)}$ et $s_{(+)}$ les sections construites dans la leçon 25 et $\chi_0(x)$ le point d'intersection de l'équateur S^n et du méridien passant par $x \neq -e_{n+1}$. [On note que $\chi(x) \in E^{n+1}_{(-)}$ signifie précisément que la distance entre le pôle $-e_{n+1}$ et le point x du méridien est $\pi/4$ au plus et que si $\chi(x) \in E^{n+1}_{(+)}$, elle est $\pi/4$ au moins (et $\pi/2$ au plus).] Puisque les points x, $\chi(x) \in S^n$, vérifient l'égalité $\chi(x) = \chi_0(x)$ (et comme $s_{(-)} = s_{(+)} T_{n+1}$), la formule (4) définit bien l'application continue χ'. Vu que $p(s_{(+)}(\chi(x))\, T_{n+1}(\chi_0)x))) = p(s_{(+)}(\chi(x))) = \chi(x)$ et $p(s_{(-)}(\chi(x))) = \chi(x)$, l'application χ' est un relèvement de χ, et la restriction $\chi'|_{S^n}$ de χ' à S^n coïncide avec T_{n+1}

parce que $\chi(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_{n+1}$ pour $\mathbf{x} \in \mathbb{S}$ et $s_{(+)}(\mathbf{e}_{n+1}) = R(\mathbf{e}_{n+1}, \mathbf{e}_{n+1}) = \mathrm{id}$ (voir leçon 25).

Conformément à la formule (2), cela démontre la proposition 1. □

Corollaire 1. *Si n est impair, l'élément $[T_{n+1}]$ du groupe $\pi_n SO(n+1)$ est d'ordre infini et*

$$\partial : \pi_{n+1}\mathbb{S}^{n+1} \to \pi_n SO(n+1)$$

est un monomorphisme.

D é m o n s t r a t i o n. Il suffit de noter qu'on a dans le groupe $\pi_n \mathbb{S}^n$:

$$p'_* [T_{n+1}] = (1 + (-1)^n)\,\iota_n$$

(voir problème 8 de la leçon 25). □

Ainsi, *le groupe stable $\pi_n SO$ est isomorphe pour n impair au groupe quotient du groupe métastable $\pi_n SO(n+1)$ par un sous-groupe cyclique infini.*

* * *

Comme $T_{n+1} = T_{n+1} \circ \mathrm{id}$, la proposition 1 s'écrit

$$(T_{n+1})_* = \partial_{n+1},$$

∂_{n+1} étant l'homomorphisme $\pi_{n+1}\mathbb{S}^{n+1} \to \pi_n SO(n+1)$.

Cet énoncé admet une généralisation importante.

Quels que soient $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^n$ et $t \in [-1, 1]$, nous désignons par $[\mathbf{x}, t]$ le point $\cos\frac{\pi}{2} t \cdot \mathbf{x} + \sin\frac{\pi}{2} \cdot \mathbf{e}_{n+1}$ de la sphère $\mathbb{S}^{n+1}$ (il est sur le méridien passant par $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^{n+1}$ dont il est distant de $\frac{\pi}{2} t$; ainsi, $\mathbf{x}$ et t sont les analogues de la longitude et de la latitude des géographes).

Cette notation aidant, on fait correspondre à $f: \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^m$ quelconque l'application $Ef: (\mathbb{S}^{n+1}, \mathbf{e}_{n+1}) \to (\mathbb{S}^{m+1}, \mathbf{e}_{m+1})$ définie par

$$(Ef)[\mathbf{x}, t] = [f(\mathbf{x}), t], \quad \mathbf{x} \in \mathbb{S}^n, \quad -1 \leqslant t \leqslant 1.$$

Problème 2. Démontrer que

1° *la formule $E[f] = [Ef]$ définit parfaitement une application*

$$E : \pi_n\mathbb{S}^m \to \pi_{n+1}\mathbb{S}^{m+1};$$

2° *E est un homomorphisme.*

Il est clair que $E(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$, donc $E\iota_n = \iota_{n+1}$.

E s'appelle *homomorphisme de suspension* ou *suspension* tout court. Une application $g: \mathbb{S}^{n+1} \to \mathbb{S}^{m+1}$ (resp. classe d'homotopie $\beta \in \pi_{n+1}\mathbb{S}^{m+1}$) est obtenue *par suspension* s'il existe une application $f: \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^m$ (resp. classe d'homotopie $\alpha \in \pi_n\mathbb{S}^m$) telle que $g = Ef$ (resp. $\beta = E\alpha$). Tous les éléments $\beta \in \pi_{n+1}\mathbb{S}^{m+1}$ forment un sous-groupe (image Im E de l'homomorphisme E) de $\pi_{n+1}\mathbb{S}^{m+1}$.

Proposition 2. *Quel que soit $m \leqslant n$, l'homomorphisme composé*

$$\pi_n S^m \xrightarrow{E} \pi_{n+1} S^{m+1} \xrightarrow{\partial_{m+1}} \pi_n \, SO(m+1)$$

coïncide avec l'homomorphisme $(T_{m+1})_*: \pi_n S^m \to \pi_n SO(m+1)$ *induit par l'application* T_{m+1}:

$$(T_{m+1})_* = \partial_{m+1} \circ E.$$

Démonstration. Soit $\alpha \in \pi_n S^m$ défini par l'application $f: S^n \to S^m$, et soit le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} (E^{n+1}_{(-)}, S^n) & \xrightarrow{E_{(-)}f} & (E^{m+1}_{(-)}, S^m) & \xrightarrow{\chi'_m} & (SO(m+2), SO(m+1)) \\ \chi_n \downarrow & & \downarrow \chi_m & & \\ (S^{n+1}, e_{n+1}) & \xrightarrow{Ef} & (S^{m+1}, e_{m+1}) & \xleftarrow{p} & (SO(m+2), SO(m+1)), \end{array}$$

où χ_n et χ_m sont les applications (3) pour n et m respectivement, χ'_m est le relèvement (4) de χ_m et $E_{(-)}f$ est la restriction de l'application Ef à $E^{n+1}_{(-)}$. Le diagramme est évidemment commutatif, si bien que $\chi'_m \circ E_{(-)}f$ est un relèvement de $\chi_m \circ E_{(-)}f = Ef \circ \chi_n$. L'application $Ef \circ \chi_n$ donne par définition l'élément $E\alpha$ du groupe $\pi_{n+1} S^{m+1}$ (considéré comme groupe des classes d'homotopie rel S^n des applications $(E^{n+1}_{(-)}, S^n) \to (S^{n+1}, e_{n+1})$), et la restriction $g = (\chi'_m \circ E_{(-)}f)|_{S^n}$ de $\chi'_m \circ E_{(-)}f$ à S^n (regardée comme application $S^n \to SO(m+1)$) définit donc l'élément $\partial E\alpha$ de $\pi_n SO(m+1)$.

D'autre part,

$$E_{(-)}f|_{S^n} = f \quad \text{et} \quad \chi'_m|_{S^m} = T_{m+1}$$

entraînent $g = T_{m+1} \circ f$ et, partant, $[g] = (T_{m+1})_* [f] = (T_{m+1})_* \alpha$. Par conséquent, $\partial E\alpha = (T_{m+1})_* \alpha$. □

Théorème 1. *L'application*

$$E: \pi_n S^m \to \pi_{n+1} S^{m+1}$$

est pour $n < 2m - 1$ un isomorphisme, et elle est un épimorphisme si $n = 2m - 1$. □

Ce théorème porte le nom de *théorème de Freudenthal* (bien que Pontriaguine l'ait prouvé un peu avant ce dernier). La démonstration étant assez compliquée ne saurait être donnée dans ce livre.

On note que le théorème est trivial pour $n \leqslant m$ (car tous les groupes y figurant sont triviaux pour $n < m$; quand $n = m$, la cause en est l'égalité $E\iota_n = \iota_{n+1}$). Nous n'aurons en fait besoin que du premier cas non trivial, savoir $n = m + 1$.

Avec ce théorème, la proposition 2 entraîne

$$\operatorname{Im} \partial_{m+1} = \operatorname{Im} (T_{m+1})_*$$

dans $\pi_n SO(m+1)$ pour $n \leqslant 2m - 1$. Si $n = m + 1$, c'est exactement l'affirmation **d** de la leçon 25.

Passons à l'affirmation e et calculons explicitement pour tout $n \geqslant 1$ les groupes $\pi_{n+1}S^n$.

* * *

Soit $p: (\mathscr{E}, e_0) \to (\mathscr{B}, b_0)$ un revêtement pointé quelconque (voir leçon 5). Chaque revêtement est une fibration de Hurewicz (voir leçon 2), si bien qu'on a la suite exacte

$$(5) \quad \ldots \to \pi_n(\mathscr{F}, e_0) \to \pi_n(\mathscr{E}, e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(\mathscr{B}, b_0) \to \pi_{n-1}(\mathscr{F}, e_0) \to \ldots$$

D'autre part, $\pi_n(\mathscr{F}, e_0)$ est trivial pour tout $n \geqslant 1$ vu que la fibre $\mathscr{F}$ est discrète. Aussi, l'exactitude de la suite (5) fait que *l'homomorphisme*

$$p_*: \pi_n(\mathscr{E}, e_0) \to \pi_n(\mathscr{B}, b_0)$$

induit par le revêtement p constitue un isomorphisme pour tout $n \geqslant 2$.

[Quant au cas $n = 1$, la propriété en question de (5) entraîne que $p_*: \pi_1(\mathscr{E}, e_0) \to \pi_1(\mathscr{B}, b_0)$ est un monomorphisme, ce que nous savons d'ailleurs (voir proposition 1 de la leçon 4).]

En particulier, le groupe $\pi_n(\mathscr{B}, b_0)$, $n \geqslant 2$, est isomorphe pour tout espace recouvrable $\mathscr{B}$ au groupe $\pi_n(\mathscr{E}, e_0) = \pi_n\mathscr{E}$ du revêtement universel $\mathscr{E}$ (on rappelle que $\mathscr{E}$ est simplement connexe). Puisque c'est la droite $\mathbb{R}$ qui est l'espace $\mathscr{E}$ pour la circonférence S^1 (voir exemple 1 de la leçon 2) et $\pi_n\mathbb{R} = 0$ (voir ci-dessus le calcul de $\pi_n S^m$ pour $n < m$), cela prouve que

$$(6) \qquad \pi_n S^1 = 0 \quad \text{pour} \quad n \geqslant 2.$$

En particulier, $\pi_2 S^1 = 0$.

* * *

On identifie la sphère S^2 au plan complété $\mathbb{C}^+$ des nombres complexes (i.e. à la droite projective complexe $\mathbb{C}P^1$) et on assimile la sphère S^3 à la sphère unité du plan complexe $\mathbb{C}^2$. Soit l'application

$$(7) \qquad h: S^3 \to S^2$$

donnée par

$$h(z_0, z_1) = \frac{z_1}{z_0}, \quad |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1.$$

C'est la *fibration de Hopf*.

On identifie les points $(z_0, z_1) \in S^3$ aux quaternions $\xi = z_0 + z_1 j$ (i.e. S^3 est considérée comme groupe des quaternions ξ de norme $|\xi| = 1$) et on obtient de suite que les fibres de l'applica-

tion h sont exactement les classes $S^1\xi$ du groupe S^3 suivant son sous-groupe S^1 à éléments complexes z, $|z| = 1$. Par conséquent, *l'application* (7) *est un fibré localement trivial de fibre-type* S^1 (ou, plus précisément, *un* S^1*-fibré principal localement trivial*).

[Toutes les fibres de h, sauf deux, deviennent par la projection stéréographique $S^3 \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ des courbes fermées de $\mathbb{R}$ dont chacune rencontre le disque unité $\mathring{B}^2$ du plan Oxy en un seul point, et les deux fibres restantes se transforment l'une en l'axe Oz et l'autre en le bord $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, du disque $\mathring{B}^2$. L'application h admet donc une représentation géométrique sensible.]

La suite d'homotopie de la fibration de Hopf s'écrit

$$\ldots \to \pi_{n+1}S^1 \to \pi_n S^3 \xrightarrow{h_*} \pi_n S^2 \to \pi_n S^1 \to \ldots,$$

ce qui entraîne de suite selon (6) que l'*homomorphisme*

$$h_* : \pi_n S^3 \to \pi_n S^2$$

induit par h *est un isomorphisme pour tout* $n \geqslant 2$.

En particulier, *le groupe* $\pi_3 S^2$ *est isomorphe du groupe* $\pi_2 S^2 = \mathbb{Z}$. L'isomorphisme

$$H : \pi_3 S^2 \to \mathbb{Z}$$

est donné par

$$H = \deg \circ h_*^{-1}$$

(si bien que $h_*(\alpha) = H(\alpha)\,\iota_2$ pour tout élément $\alpha \in \pi_3 S^2$).

Le nombre $H(\alpha) = H\alpha$ s'appelle *invariant de Hopf* de $\alpha \in \pi_3 S^2$ (ou de l'application $f : S^3 \to S^2$ de la classe α). On le calcule en choisissant dans la classe α une application $g \circ h$, avec $g : S^2 \to S^2$ (on sait déjà que ce choix est toujours possible), auquel cas

$$H\alpha = \deg g.$$

La classe d'homotopie de l'application $h : S^3 \to S^2$ est notée η_3. Comme $h = \mathrm{id} \circ h$, on a $H\eta_3 = 1$, si bien que *l'élément* η_3 *engendre le groupe cyclique infini* $\pi_3 S^2$.

* * *

Puisque $n = 2m - 1$ pour $n = 3$ et $m = 2$, aux termes du théorème de Freudenthal, *l'application* $E : \pi_3 S^2 \to \pi_4 S^3$ *est un épimorphisme, et toutes les applications*

$$E : \pi_{n+1} S^n \to \pi_{n+2} S^{n+1}, \quad n \geqslant 3,$$

sont des isomorphismes.

Par conséquent, *tous les groupes* $\pi_{n+1} S^n$, $n \geqslant 3$, *sont des groupes cycliques de générateurs* $\eta_{n+1} = E\eta_n = E^{n-2}\eta_3$.

Théorème 2. *Les groupes* $\pi_{n+1}S^n$, $n \geqslant 3$, *sont des groupes cycliques d'ordre* 2.□

C'est un autre théorème de Freudenthal (dont la première démonstration est cette fois encore l'œuvre de Pontriaguine). La vérification en est même plus ardue que celle du théorème 1, et nous nous en passons. [En fait, Freudenthal a prouvé un théorème qui décrit le noyau de l'épimorphisme $E: \pi_{2n-1}S^n \to \pi_{2n}S^{n+1}$ pour tout $n \geqslant 2$. On l'appelle d'ordinaire « partie difficile » du théorème de Freudenthal dont la « partie facile » est le théorème 1.]

Le théorème 2 fournit en particulier l'affirmation e de la leçon 25.

* * *

L'affirmation f traduit un fait infiniment plus simple.

Soient $f: S^n \to S^m$ et $g: S^m \to S^r$ deux applications continues quelconques, et soient $\alpha \in \pi_n S^m$ et $\beta \in \pi_m S^r$ leurs classes d'homotopie respectives.

Problème 3. Démontrer que la formule

$$\beta \circ \alpha = [g \circ f]$$

définit bien l'élément $\beta \circ \alpha$ du groupe $\pi_n S^r$.

On note que $\beta \circ \alpha$ n'est autre que l'élément $g_*\alpha$:

$$\beta \circ \alpha = g_*\alpha.$$

Aussi, on a pour n'importe quels éléments $\alpha_1, \alpha_2 \in \pi_n S^m$, $\beta \in \pi_m S^r$

$$\beta \circ (\alpha_1 + \alpha_2) = \beta \circ \alpha_1 + \beta \circ \alpha_2$$

(*distributivité à droite*).

Chose curieuse, *la distributivité à gauche*

$$(\beta_1 + \beta_2) \circ \alpha = \beta_1 \circ \alpha + \beta_2 \circ \alpha, \quad \alpha \in \pi_n S^m, \quad \beta_1, \beta_2 \in \pi_m S^r,$$

n'a pas lieu en général. (On montre par exemple (le faire!) *qu'on a pour tout* $k \in \mathbb{Z}$

$$\underbrace{(\iota_3 + \ldots + \iota_3)}_{k \text{ fois}} \circ \eta_3 = k^2 \eta_3$$

bien que $\iota_3 \circ \eta_3 = \eta_3$, résultat évident.) Mais si α est obtenu par suspension, cette loi s'avère juste.

Problème 4. Montrer qu'*on a pour n'importe quels éléments* $\alpha \in \pi_{n-1}S^{m-1}$, $\beta_1, \beta_2 \in \pi_m S^r$

$$(\beta_1 + \beta_2) \circ E\alpha = \beta_1 \circ E\alpha + \beta_2 \circ E\alpha.$$

[*Indication.* Toute application $f: S^{n-1} \to S^{m-1}$ vérifie l'égalité $\mu \circ Ef = (Ef \vee Ef) \circ \mu$, avec μ l'application (12) de la leçon 25.]

Si $g: S^m \to S^m$ est en particulier de degré k (donc $[g] = k\iota_m$), alors $g_* (E\alpha) = kE\alpha$ pour chaque $\alpha \in \pi_{n-1}S^{m-1}$. Supposons par exemple que k est pair et que tous les éléments du groupe $\pi_n S^m$ s'écrivent $E\alpha$ et sont d'ordre 2 (or, c'est justement le cas de $n = m + 1$, $m \geqslant 3$). On a $g_* = 0$.

Cela prouve l'affirmation f de la leçon 25.

Il ne nous reste qu'à vérifier l'affirmation g.

* * *

Le problème 9 de la leçon 25 implique que l'application $p_1^U \circ T_{n+1}^U: S^n \to S^{n-1}$, $n = 2m$, de l'affirmation g est définie par

$$w_i = -\frac{2z_i\bar{z}_{m-1}}{(1+z_m)^2}, \quad w_{m-1} = 1 - \frac{2\,|\,z_{m-1}\,|^2}{(1+z_m)^2}, \quad i = 0, \ldots, m-2, \tag{8}$$

avec $z_0, \ldots, z_m$ les coordonnées du point $z \in S^n$ et $w_0, \ldots, w_{m-1}$ celles de $w = (p_1^U \circ T_{n+1}^U)(z)$ de S^{n-1}. (N'oubliez pas que $\operatorname{Re} z_m = 0$.) Aussi, la restriction g de $p_1^U \circ T_{n+1}^U$ à l'équateur S^{n-1} (défini par $\operatorname{Im} z_m = 0$, i.e. $z_m = 0$) de la sphère S^n est donnée par

$$w_i = -2z_i\bar{z}_{m-i}, \quad i = 0, \ldots, m-2, \qquad w_{m-1} = 1 - 2\,|\,z_{m-1}\,|^2. \tag{9}$$

C'est donc une application de la sphère S^{n-1} de l'espace des z sur l'équateur (d'équation $\operatorname{Im} w_{m-1} = 0$) de la sphère S^{n-1} de l'espace des w. Il y a plus. Selon la dernière formule (8),

$$\operatorname{Im} w_{m-1} = \frac{4\,|\,z_{m-1}\,|^2}{|\,1 - z_m\,|^4} \operatorname{Im} z_m,$$

si bien que l'hémisphère supérieur $E_{(+)}^n \subset S^n$ formé des points $z \in S^n$ tels que $\operatorname{Im} z_m \geqslant 0$ est envoyé par $p_1^U \circ T_{n+1}^U$ en l'hémisphère supérieur $E_{(+)}^{n-1} \subset S^{n-1}$ formé des points $w \in S^{n-1}$ pour lesquels on a $\operatorname{Im} w_{m-1} \geqslant 0$. Pareillement, l'hémisphère inférieur $E_{(-)}^n$, $\operatorname{Im} z_m \leqslant 0$, devient par cette application l'hémisphère inférieur $E_{(-)}^{n-1}$, $\operatorname{Im} w_m \leqslant 0$.

Problème 5. Montrer que toute application $f: S^n \to S^m$ qui transforme l'hémisphère $E_{(+)}^n$ de S^n en l'hémisphère $E_{(+)}^m$ de S^m et l'hémisphère $E_{(-)}^n$ en $E_{(-)}^m$ (elle envoie donc l'équateur S^{n-1} de S^n en l'équateur S^{m-1} de S^m) est homotope à l'application Eg, g étant la restriction de f à S^{n-1} qu'on considère comme $S^{n-1} \to S^{m-1}$. [*Indication.* Les points $f(x)$ et $(Eg)(x)$, $x \in S^n$, n'étant pas diamétralement opposés peuvent être joints par un arc de grand cercle de longueur inférieure à π.]

On voit en particulier que $p_1^U \circ T_{n+1}^U$ *est homotope à* Eg, g *étant l'application* (9).

On en tient compte et on commence par le cas $m = 2$, l'application $g\colon S^3 \to S^2$ étant définie par

$$w_0 = -2z_0\bar{z}_1, \quad w_1 = 1 - 2\,|\,z_1\,|^2, \tag{10}$$

où $|\,z_0\,|^2 + |z_1\,|^2 = 1$, $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ et $|\,w_0\,|^2 + |\,w_1\,|^2 = 1$, $w_0 \in \mathbb{C}$, $w_1 \in \mathbb{R}$. La projection stéréographique $S^2 \to \mathbb{C}^+$ est donnée par

$$z = \frac{w_0}{1-w_1},$$

(voir formule (28) de I.29) si bien que g considérée comme $S^3 \to \mathbb{C}^+$ l'est par

$$z = \frac{-2z_0\bar{z}_1}{2\,|\,z_1\,|^2} = -\frac{z_0}{z_1},$$

et elle diffère donc de l'application de Hopf (7) par le difféomorphisme $z \mapsto -\frac{1}{z}$ de la sphère $\mathbb{C}^+$. Ce dernier est évidemment de degré 1, si bien que l'application g représente pour $n = 2$ le générateur η_3 de $\pi_3 S^2$ et, partant, $p_1^U \circ T_{n+1}^U$ représente le générateur $\eta_4 = E\eta_3$ du groupe $\pi_4 S^3$.

Cela démontre g pour $n = 2$.

Afin d'avoir ce résultat pour $m > 2$ pair quelconque, il suffit de montrer que *l'application* $g\colon S^{n-1} \to S^{n-2}$, $n = 2m$, *m pair, est homotope à l'application* $E^{n-4}g_2$, *où* $g_2\colon S^3 \to S^2$ *est définie par* (10). On procédera en explicitant l'homotopie correspondante. (On peut énoncer le problème analogue pour $p_1 \circ T_{2n+1}$ dans le domaine réel, auquel cas l'homotopie cherchée est construite géométriquement, après quoi on transporte formellement les formules obtenues dans le domaine complexe. Une fois les formules explicitées, on n'a pas à se soucier de la façon dont on les a obtenues.)

Problème 6. Montrer que *l'application* $E^{n-4}g_2$ *est donnée par les formules*

$$\begin{aligned} & w_i = z_i, \quad i = 0, \ldots, m-3, \\ & w_{m-2} = -2\frac{z_{m-2}\bar{z}_{m-1}}{\sqrt{|\,z_{m-2}\,|^2 + |\,z_{m-1}\,|^2}}, \\ & w_{m-1} = \frac{|\,z_{m-2}\,|^2 - |\,z_{m-1}\,|^2}{\sqrt{|\,z_{m-2}\,|^2 + |\,z_{m-1}\,|^2}} \end{aligned} \tag{11}$$

(on estime que $w_{m-2} = w_{m-1} = 0$ si $z_{m-2} = z_{m-1} = 0$).

On pose $m = 2l$, $\tau = \sqrt{t(1-t)}$ et $A = \sqrt{1 - t + t(|z_{m-2}|^2 + |z_{m-1}|^2)}$ et on définit l'homotopie $S^{n-1} \times I \to S^{n-2}$ par

$$w_{2j} = tz_{2j} + \tau z_{2j+1} - \frac{2}{A}\,[(1-t)\,z_{2j}\bar{z}_{m-1} - \tau\bar{z}_{2j+1}z_{m-1}],$$

$$
(12)\qquad
\begin{aligned}
&w_{2j+1}=tz_{2j+1}-\tau\bar z_{2j}-\frac{2}{A}\left[(1-t)\,z_{2j+1}\bar z_{m-1}+\tau\bar z_{2j}z_{m-1}\right],\\
&w_{m-2}=A-\frac{2}{A}\,z_{m-2}\bar z_{m-1},\quad w_{m-1}=A-\frac{2}{A}\,|\,z_{m-1}\,|^2,\\
&\qquad j=0,\ 1,\ \ldots,\ l-2,\quad 0\leqslant t\leqslant 1
\end{aligned}
$$

(pour $|\,z_{m-1}\,|^2+|\,z_{m-2}\,|^2\neq 0$; si $|\,z_{m-1}\,|^2+|\,z_{m-2}\,|^2=0$, donc $A=$ $=\sqrt{1-t}$, on pose

$$
\begin{aligned}
&w_{2j}=tz_{2j}+\tau z_{2j+1}-2\left[\sqrt{1-t}\,z_{2j}\bar z_{m-1}-\sqrt{t}\,z_{2j-1},\ z_{m-1}\right],\\
&w_{2j+1}=tz_{2j+1}-\tau\bar z_{2j}-2\left[\sqrt{1-t}\,z_{2j+1}\bar z_{m-1}+\sqrt{t}\,z_{2j}z_{m-1}\right],\\
&w_{m-2}=0,\quad w_{m-1}=\sqrt{1-t};
\end{aligned}
$$

il est clair que la continuité est conservée).

Les formules (12) ont un sens (notons-le) pour m pair seul.

Elles deviennent (9) ou (11) selon que $t=0$ ou $t=1$.

Il ne faut donc que démontrer que (12) définissent effectivement l'application $S^{n-1}\times I\to S^{n-2}$, i.e. que

$$
\sum_{i=0}^{m-1}|\,w_i\,|^2=1\quad\text{si}\quad\sum_{i=0}^{m-1}|\,z_i\,|^2=1\quad\text{et}\quad 0\leqslant t\leqslant 1.
$$

(On note que w_{m-1} de (12) est nécessairement réel.) Le seul moyen d'y arriver est malheureusement un calcul direct fastidieux.

On a

$$
\begin{aligned}
|\,w_{2j}\,|^2&=\left(tz_{2j}+\tau\bar z_{2j+1}-\frac{2}{A}\left[(1-t)\,z_{2j}\bar z_{m-1}-\tau\bar z_{2j+1}z_{m-1}\right]\right)\times\\
&\quad\times\left(t\bar z_{2j}+\tau z_{2j+1}-\frac{2}{A}\left[(1-t)\,\bar z_{2j}z_{m-1}-\tau z_{2j+1}\bar z_{m-1}\right]\right)=\\
&=t\,|\,z_{2j}\,|^2+t\tau\,(z_{2j}z_{2j+1}+\bar z_{2j}\bar z_{2j+1})+\tau^2\,|\,z_{2j+1}\,|^2-\\
&\quad-\frac{2}{A}\left[(1-t)\,t\,|\,z_{2j}\,|^2+(1-2t)\,\tau\bar z_{2j}\bar z_{2j+1}-\tau^2\,|\,z_{2j+1}\,|^2\right]z_{m-1}-\\
&\quad-\frac{2}{A}\left[(1-t)\,t\,|\,z_{2j}\,|^2+(1-2t)\,z_{2j}z_{2j+1}-\tau^2\,|\,z_{2j+1}\,|^2\right]\bar z_{m-1}+\\
&\quad+\frac{4}{A^2}\left[(1-t)^2\,|\,z_{2j}\,|^2|\,z_{m-1}\,|^2-\right.\\
&\quad\left.-(1-t)\,\tau\,(z_{2j}z_{2j+1}\bar z^2_{m-1}+\bar z_{2j}\bar z_{2j+1}z^2_{m-1})+\tau^2\,|\,z_{2j+1}\,|^2\,|\,z_{m-1}\,|^2\right].
\end{aligned}
$$

Pareillement,

$$
\begin{aligned}
|\,w_{2j+1}\,|^2&=\left(tz_{2j+1}-\tau\bar z_{2j}-\frac{2}{A}\left[(1-t)\,z_{2j+1}\bar z_{m-1}+\tau\bar z_{2j}z_{m-1}\right]\right)\times\\
&\quad\times\left(t\bar z_{2j+1}-\tau z_{2j}-\frac{2}{A}\left[(1-t)\,\bar z_{2j+1}z_{m-1}+\tau z_{2j}\bar z_{m-1}\right]\right)=
\end{aligned}
$$

$$= t^2 \mid z_{2j+1} \mid^2 - t\tau(z_{2j}z_{2j+1} + \bar{z}_{2j}\bar{z}_{2j+1}) + \tau^2 \mid z_{2j} \mid^2 -$$
$$- \frac{2}{A}[(1-t)t \mid z_{2j+1} \mid^2 - (1-2t)\tau\bar{z}_{2j}\bar{z}_{2j+1} - \tau^2 \mid z_{2j} \mid^2] z_{m-1} -$$
$$- \frac{2}{A}[(1-t)t \mid z_{2j+1} \mid^2 - (1-2t)\tau z_{2j}z_{2j+1} - \tau^2 \mid z_{2j} \mid^2] \bar{z}_{m-1} +$$
$$+ \frac{4}{A^2}[(1-t)^2 \mid z_{2j+1} \mid^2 \mid z_{m-1} \mid^2 +$$
$$+ (1-t)\tau(z_{2j}z_{2j+1}\bar{z}_{m-1}^2 + \bar{z}_{2j}\bar{z}_{2j+1}z_{m-1}^2) + \tau^2 \mid z_{2j} \mid^2 \mid z_{m-1} \mid^2].$$

Aussi

$$\sum_{i=0}^{m-3} \mid w_i \mid^2 = \Big(t^2 + \tau^2 - \frac{2}{A}[(1-t)t - \tau^2](z_{m-1} + \bar{z}_{m-1}) +$$
$$+ \frac{4}{A^2}[(1-t)^2 + \tau^2 \mid z_{m-1} \mid^2]\Big) \sum_{i=0}^{m-3} \mid z_i \mid^2,$$

donc

$$\sum_{i=0}^{m} \mid w_i \mid^2 = \frac{(A^2t + 4(1-t) \mid z_{m-1} \mid^2)(1 - \mid z_{m-2} \mid^2 - \mid z_{m-1} \mid^2)}{A^2} +$$
$$+ \frac{4 \mid z_{m-2} \mid^2 \mid z_{m-1} \mid^2 + (A^2 - 2 \mid z_{m-1} \mid^2)^2}{A^2}.$$

Le coefficient de $\mid z_{m-1} \mid^4$ du numérateur vaut $-4(1-t) + 4 = 4t$, et celui de $\mid z_{m-1} \mid^2$ est

$$-A^2t + 4(1-t)(1 - \mid z_{m-2} \mid^2) + 4 \mid z_{m-2} \mid^2 - 4A^2 =$$
$$= -A^2t + 4[(1-t) + t \mid z_{m-2} \mid^2 - A^2] =$$
$$= -A^2t - 4t \mid z_{m-1} \mid^2.$$

Quant au terme constant, il s'exprime comme suit:

$$A^2t(1 - \mid z_{m-2} \mid^2) + A^4 = A^2(1 + t \mid z_{m-1} \mid^2).$$

Aussi

$$\sum_{i=0}^{m} \mid w_i \mid^2 = \frac{4t \mid z_{m-1} \mid^4 - (4t \mid z_{m-1} \mid^2 + A^2t) \mid z_{m-1} \mid^2 + A^2(1 + t \mid z_{m-1} \mid^2)}{A^2} = 1,$$

ce qui prouve complètement l'affirmation g. □

Nous pouvons enfin estimer démontrée la proposition 1 de la leçon 25 (encore ne l'est-elle que modulo les théorèmes 1 et 2 de Freudenthal). Le non-parallélisme sur les sphères S^{n+1}, $n = 4l + 2$, $l \neq 1$, est établi de façon analogue par le théorème de Bott relatif au groupe métastable $\pi_{2m}U(m)$ (voir leçon 26). D'ailleurs, cette dé-

monstration répète tout bonnement celle de l'implication *3* de la page 377 (dont on s'est passé). Cela tient à la liaison étroite entre les $K_{\mathbf{C}}$-groupes et les groupes stables d'homotopie $\pi_n U$.

* * *

Comme deux fibrés vectoriels sont isomorphes si et seulement si c'est le cas des fibrés principaux associés et comme un fibré vectoriel complexe quelconque de rang m est réductible au groupe U (m), le problème 3 de la leçon 25 entraîne que l'ensemble $\mathrm{Vect}_{\mathbf{C}}^m S^n$ de fibrés vectoriels complexes de rang m sur la sphère S^n est en correspondance biunivoque canonique avec le groupe $\pi_{n-1}U\ (m)$ et qu'il correspond au fibré ξ la classe caractéristique du U (m)-fibré principal associé. Soit $T\xi$ cette classe.

Problème 7. On suppose que la flèche verticale gauche du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Vect}_{\mathbf{C}}^m S^n & \xrightarrow{T} & \pi_{n-1}U\,(m) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Vect}_{\mathbf{C}}^{m+1} S^n & \xrightarrow{T} & \pi_{n-1}U\,(m+1) \end{array}$$

constitue l'application $\xi \mapsto \xi \oplus \theta^1$ et que la flèche droite est induite par l'inclusion U $(m) \to$ U $(m+1)$. Montrer qu'il s'agit d'un *diagramme commutatif.*

Il en résulte que la formule $T\,[\xi] = T\,(\xi + \theta^N)$, N étant un nombre quelconque supérieur à $m+1$, définit parfaitement l'application (évidemment bijective)

$$(13) \qquad T : K_{\mathbf{C}} S^n \to \pi_{n-1} U.$$

Problème 8. Montrer que (13) *est un isomorphisme.* [*Indication.* Il suffit de démontrer que quelles que soient les applications $A : \mathscr{X} \to$ U (m_1), $B : \mathscr{X} \to$ U (m_2), l'application $A \oplus B : \mathscr{X} \to$ U $(m_1 + m_2)$ donnée par

$$(A \oplus B)(p) = \begin{Vmatrix} A(p) & 0 \\ 0 & B(p) \end{Vmatrix}, \quad p \in \mathscr{X},$$

est homotope à $AB : \mathscr{X} \to$ U $(m_1 + m_2)$ définie par

$$(AB)(p) = \begin{Vmatrix} A(p) & 0 \\ 0 & E_{m_2} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} B(p) & 0 \\ 0 & E_{m_1} \end{Vmatrix},$$

avec E_m la matrice unité d'ordre m; cf. formule (8) de la leçon 24.]

En vertu du théorème de Bott traitant les groupes $\pi_n U$, cela démontre l'affirmation relative aux groupes $K_{\mathbf{C}} S^n$ de la leçon 24.

Comme chaque point $(\mathbf{z}, \alpha)$ de l'espace total du fibré tautologique η_{n+1} sur $\mathbf{C}P^n$ (voir leçon 24) s'identifie canoniquement pour $\mathbf{z} \neq 0$ au point $\mathbf{z}$, l'ensemble de tous ces points avec $|\,\mathbf{z}\,| = 1$ est une sous-variété plongée difféomorphe à la sphère S^{2n+1}.

Problème 9. Montrer que

1° *la restriction de la projection du fibré* η_{n+1} *à cette sous-variété est le fibré* $S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ *de fibres les grands cercles de* S^{2n+1} (*intersections de* S^{2n+1} *avec les plans bidimensionnels passant par le centre*);

2° *si* $n = 1$, *ce fibré est par suite de* $\mathbb{C}P^1 = S^2$ *exactement la fibration de Hopf* (7).

(Cela explique le nom de *fibration de Hopf* qu'on donne souvent aux fibrés tautologiques η_{n+1}.)

Problème 10. Montrer que *la classe caractéristique du fibré* η_2 *est un générateur du groupe* $\pi_1 U(1) = \pi_1 S^1$.

C'est exactement le théorème signalé dans la leçon 24 qui dit que l'élément β_2 engendre le groupe cyclique $K_{\mathbb{C}} S^1$.

Pareillement, les affirmations a à c des pages 369-370 constituent une partie intégrante du théorème de périodicité de Bott.

ANNEXE

Construction des (N, Sp (n))-instantons. — Description des (N, Sp (n))-instantons. — Espace des modules de (N, Sp (n))-instantons. — N-instantons. — $N = 1$. — $N = 2$. — $N = 3$.

La construction des k-instantons dont nous avons fait mention dans la leçon 22 (pour des raisons de commodité, nous allons écrire N au lieu de k) constitue un cas particulier d'une construction générale unique des connexions sur les fibrés principaux (ou, ce qui revient au même, sur les fibrés vectoriels) au-dessus de la sphère $\mathbb{S}^4$. Dans cette Annexe, nous nous proposons (en suivant pour l'essentiel Atiyah) de la décrire et de l'étudier au possible.

On rappelle (voir leçon 7) qu'on désigne par le symbole Sp (n) le groupe $U^{\mathbb{H}}(n)$ des isométries de l'espace quaternionique $\mathbb{H}^n$.

Définition 1. On appelle (N, Sp (n))-*instanton* un champ autodual de Yang-Mills sur le Sp (n)-fibré principal au-dessus de la sphère $\mathbb{S}^4$ dont le nombre de Chern $c_{(2)}$ (voir leçon 23) est égal à $N > 0$.

Quand $n = 1$, ce sont exactement les N-instantons au sens de la leçon 22 (parce que Sp (1) = SU (2)).

Afin de ne pas recourir aux cartes, on identifie $\mathbb{S}^4$ à la droite projective quaternionique $\mathbb{H}P^1$ dont les points sont les classes $(x : y)$ de la proportionnalité à droite des couples de quaternions. [On n'emploie pas ici les caractères gras; les couples (x, y) et (x_1, y_1) sont proportionnels à droite (définissent un même point de $\mathbb{H}P^1$) s'il existe un quaternion $\xi \neq 0$ tel que $x_1 = x\xi$, $y_1 = y\xi$, i.e. si ou bien $y_1 = y = 0$, ou bien $x_1 y_1^{-1} = xy^{-1}$; tous les couples (x, y) sont bien sûr supposés être différents de $(0, 0)$.] Si l'on identifie la droite $\mathbb{H}P^1$ à la sphère $\mathbb{S}^4$ (ou, plus précisément, à l'espace $\mathbb{R}^4 \cup \{\infty\} = \mathbb{H} \cup \{\infty\}$), il correspond à $(x : y)$, $y \neq 0$, le quaternion xy^{-1} et à $(x : 0)$ le point ∞.

Soient C et D deux matrices quaternioniques à $n + N$ lignes et N colonnes telles que, quels que soient les quaternions x, y non simultanément nuls, la matrice

$$(1) \qquad v(x, y) = Cx + Dy$$

soit de rang N maximal, i.e. ses colonnes engendrent dans l'espace vectoriel à droite $\mathbb{H}^{n+N}$ sur $\mathbb{H}$ un sous-espace de dimension N. Ce dernier ne dépend certes que du point $(x : y) \in \mathbb{H}P^1$, si bien qu'on va le noter $\mathcal{V}_{(x : y)}$.

Soit $\mathcal{F}_{(x\,:\,y)}$ le supplémentaire orthogonal de $\mathcal{V}_{(x\,:\,y)}$ (par rapport à la métrique standard de l'espace $\mathbb{H}^{n+N}$; voir leçon 7).

Problème 1. Montrer que *les sous-espaces* $\mathcal{F}_{(x\,:\,y)}$ *et* $\mathcal{V}_{(x\,:\,y)}$ *sont des fibres des fibrés vectoriels quaternioniques sur* S^4. [*Indication.* La somme de Whitney de ces fibrés est le fibré trivial $S^4 \times \mathbb{H}^{n+N}$.]

Nous désignons ces fibrés (et leurs espaces totaux) par $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}^{\perp}$ respectivement. Le rang (sur $\mathbb{H}$) de $\mathcal{E}$ est n, et celui de $\mathcal{E}^{\perp}$ (fibré auxiliaire) vaut N.

$\mathcal{E}$ est par construction un $\mathrm{Sp}(n)$-fibré vectoriel, donc un SU $(2n)$-fibré vectoriel (par suite de l'inclusion naturelle $\mathrm{Sp}\,(n) \subset \subset \mathrm{SU}\,(2n)$). Aussi, on définit (voir leçon 23) son nombre de Chern $c_{(2)}$.

Problème 2. Montrer que *le nombre de Chern* $c_{(2)}$ *du fibré* $\mathcal{E}$ *est égal à* N. [*Indication.* $\mathcal{E}^{\perp}$ est la somme de Whitney de N fibrés quaternioniques linéaires dont le nombre de Chern $c_{(2)}$ est dans chaque cas -1.]

Ainsi, les champs autoduaux de Yang-Mills sur $\mathcal{E}$ sont des $(N,\ \mathrm{Sp}\,(n))$-instantons.

Chaque section s de $\mathcal{E}$ étant celle du fibré trivial $S^4 \times \mathbb{H}^{n+N}$ n'est autre qu'une fonction sur S^4 à valeurs dans $\mathbb{H}^{n+N}$ qui présente la propriété suivante: on a pour tout point $(x:y) \in S^4$

$$s\,(x:\,y) \in \mathcal{F}_{(x\,:\,y)}. \tag{2}$$

Aussi, tout champ de vecteurs X sur S^4 transforme s en la fonction Xs à valeurs dans $\mathbb{H}^{n+N}$. Mais Xs ne vérifie pas la condition (2). On pallie à ce défaut si l'on projette orthogonalement, pour chaque point $(x:\,y) \in S^4$, le vecteur $(Xs)_{(x\,:\,y)} \in \mathbb{H}^{n+N}$ sur $\mathcal{F}_{(x\,:\,y)}$. Soit $(\nabla_X s)_{(x\,:\,y)}$ cette projection. Dans ce cas, l'application $\nabla_X s\colon\ (x:\,y) \mapsto \mapsto (\nabla_X s)_{(x\,:\,y)}$ est une section du fibré $\mathcal{E}$ et la correspondance $s \mapsto \nabla_X s$ est (le vérifier!) une dérivation covariante.

Ainsi, on a construit sur $\mathcal{E}$ (et, partant, sur le $\mathrm{Sp}\,(n)$-fibré principal associé) une connexion ∇.

Remarque 1. On observe que ce procédé général de construction d'une connexion s'applique à un fibré ξ arbitraire, sous-fibré d'un fibré trivial (par exemple, à un fibré de type fini quelconque sur un espace normal; voir proposition 2 de la leçon 23). On montre (le faire !) que ce procédé permet de construire, à une transformation de jauge (automorphisme du fibré) près, toute connexion sur ξ.

Désireux de calculer explicitement ∇ (plus précisément, sa forme de connexion qu'est le potentiel) sans utiliser les cartes, nous faisons recours au projecteur orthogonal $P_{(x\,:\,y)}$ qui projette l'espace $\mathbb{H}^{n+N}$ sur le sous-espace $\mathcal{F}_{(x\,:\,y)}$. Soit $Q_{(x\,:\,y)} = E - P_{(x\,:\,y)}$ le projecteur supplémentaire (sur $\mathcal{V}_{(x\,:\,y)}$).

La différentielle covariante ∇s par rapport à la connexion ∇ d'une section $s\colon\ S^4 \to \mathcal{E}$ quelconque du fibré $\mathcal{E}$ est donnée par définition par la formule $\nabla s = P\,\mathrm{d}s = \mathrm{d}s - Q\,\mathrm{d}s$ (on omet les argu-

ments). Or, $Qs = 0$, donc $\mathrm{d}(Qs) = 0$, i.e. $Q\,\mathrm{d}s = -(\mathrm{d}Q)\,s$ (on identifie tous les opérateurs à leurs matrices). Comme $Q^2 = Q$, on a de plus $Q\,\mathrm{d}s = Q\,(Q\,\mathrm{d}s) = -(Q\,\mathrm{d}Q)\,s$. Par conséquent,

$$\nabla s = \mathrm{d}s + (Q\,\mathrm{d}Q)\,s = \mathrm{d}s + \Phi s,$$

où $\Phi = Q\,\mathrm{d}Q$. Cela veut dire que *l'opérateur dérivation covariante* ∇ *des sections du fibré* $\mathscr{E}$ *est une restriction de l'opérateur* $\mathrm{d} + \Phi$ *défini pour n'importe quelles fonctions* $S^4 \to \mathbb{H}^{n+N}$.

La forme de courbure F_Φ associée à la dérivation $\mathrm{d} + \Phi$ s'écrit (voir formule (14) de la leçon 22) $F_\Phi = \mathrm{d}\Phi + \Phi \wedge \Phi$.

Mais $Q^2 = Q$, donc $Q \cdot \mathrm{d}Q + \mathrm{d}Q \cdot Q = \mathrm{d}Q$, si bien que

$$\begin{aligned}\Phi \wedge \Phi &= Q \cdot \mathrm{d}Q \wedge Q \cdot \mathrm{d}Q = Q \cdot \mathrm{d}Q \cdot Q \wedge \mathrm{d}Q = \\ &= Q\,(\mathrm{d}Q - Q\,\mathrm{d}Q) \wedge \mathrm{d}Q = Q\,\mathrm{d}Q \wedge \mathrm{d}Q - Q\,\mathrm{d}Q \wedge \mathrm{d}Q = 0,\end{aligned}$$

et $F_\Phi = \mathrm{d}\Phi$, i.e. $F_\Phi = \mathrm{d}Q \wedge \mathrm{d}Q$. Il vient de suite pour la forme de courbure F de la connexion ∇:

$$F = P\,(\mathrm{d}Q \wedge \mathrm{d}Q)\,P.$$

Problème 3. Montrer que

$$Q = v\rho^{-2}\bar{v}^{\mathsf{T}},$$

avec v la matrice (1) et $\rho^2 = \bar{v}^{\mathsf{T}} v$ une matrice quaternionique d'ordre N. (On omet les arguments.)

Comme $Pv = 0$ et $\bar{v}^{\mathsf{T}} P = 0$ (on voit aisément — le démontrer ! — que tout projecteur P vérifie l'égalité $\bar{P}^{\mathsf{T}} = P$), il en découle que $P\,\mathrm{d}Q = P\,\mathrm{d}v \cdot \rho^{-2}\bar{v}^{\mathsf{T}}$ et $\mathrm{d}Q\,P = v\rho^{-2}\,\mathrm{d}\bar{v}^{\mathsf{T}} P$.

Aussi

$$F = P\,\mathrm{d}v \wedge \rho^{-2}\,\mathrm{d}\bar{v}^{\mathsf{T}} P.$$

On substitue à la sphère $S^4 = \mathbb{H} \cup \{\infty\}$ sa partie $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$ formée des points $x = (x : 1)$, auquel cas $v = Cx + D$, $\mathrm{d}v = C\,\mathrm{d}x$, donc

$$F = PC\,\mathrm{d}x \wedge \rho^{-2}\,\mathrm{d}\bar{x}\bar{C}^{\mathsf{T}} P,$$

où

$$\rho^2 = (\bar{x}\bar{C}^{\mathsf{T}} + \bar{D}^{\mathsf{T}})\,(Cx + D). \tag{3}$$

Si la matrice (3) est réelle (pour tout $x \in \mathbb{H}$), elle commute avec le quaternion $\mathrm{d}\bar{x}$, si bien que

$$F = PC\,(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}\bar{x})\,\rho^{-2}\bar{C}^{\mathsf{T}} P. \tag{4}$$

Le fait que les différentielles des coordonnées interviennent dans la forme différentielle F à valeurs dans $\mathfrak{sp}(n)$ comme groupe $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}\bar{x}$ signifie (voir fin de la leçon 21) que F est autoduale et qu'elle constitue donc un $(N, \mathrm{Sp}\,(n))$-instanton.

Le projecteur P de la formule (4) s'écrit (voir problème 3) $P = u\bar{u}^{\perp}$, où $u = u(x)$ est une matrice dont les colonnes forment une base orthonormée de l'espace $\mathcal{F}_x = \mathcal{F}_{(x\,:\,1)}$, i.e. c'est une $(n + N) \times n$-matrice quaternionique telle que

$$\bar{u}^{\mathsf{T}} u = E, \quad \bar{u}^{\mathsf{T}} v = 0, \tag{5}$$

avec v la matrice (1) (pour $y = 1$). Le champ (4) s'écrit dans cette base comme forme différentielle

$$F = \bar{u}^{\mathsf{T}} C\, (\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}\bar{x})\, \rho^{-2} \bar{C}^{\mathsf{T}} u$$

à valeurs dans $\mathfrak{sp}(n)$.

Problème 4. Montrer que *le potentiel A de l'instanton* (4) *est donné par*

$$A = \bar{u}^{\mathsf{T}} \mathrm{d}u. \tag{6}$$

[*Indication.* $F = \mathrm{d}\bar{u}^{\mathsf{T}} Q \wedge \mathrm{d}u$.]

Ainsi, on vient de démontrer la

Proposition 1. *Soient C et D des $(n + N) \times n$-matrices quaternioniques rectangulaires telles que*

a) *la matrice* (3) *soit réelle pour tout quaternion x;*

b) *quels que soient les quaternions x et y non tous deux nuls, la matrice* (1) *soit de rang maximal N. La formule* (4) *définit un* $(N, \mathrm{Sp}\,(n))$*-instanton F à potentiel* (6). □

Atiyah, Hitchin, Drinfeld et Manin ont montré que cette construction donne, à l'équivalence de jauge près, tous les $(N, \mathrm{Sp}\,(n))$-instantons.

* * *

Si l'on remplace u par uG, G étant une matrice quelconque de $\mathrm{Sp}\,(n)$, le potentiel (6) subit évidemment une transformation de jauge (tandis que l'instanton F, qui ne contient pas u sous forme explicite, reste le même).

Pareillement, l'instanton F (voire le fibré $\mathcal{E}$) reste inchangé par la multiplication à droite de C et D par une matrice réelle non dégénérée arbitraire d'ordre N (cette multiplication se ramène à un changement de base pour chaque espace $\mathcal{V}_{(x\,:\,y)}$) et par la multiplication à gauche de C et D par une matrice quelconque de $\mathrm{Sp}\,(n + N)$ (ce qui se traduit par un changement de base dans $\mathbb{H}^{n+N}$).

Aussi, l'ensemble de tous les instantons (4) est obtenu à partir de l'ensemble des couples (C, D) des matrices vérifiant les conditions **a)** et **b)** si l'on effectue un passage au quotient par le groupe $\mathrm{GL}\,(N; \mathbb{R})$ opérant à droite sur (C, D) et par le groupe $\mathrm{Sp}\,(n + N)$ qui opère à gauche sur ces couples.

Il y a plus. On utilise à juste titre sur $\mathbb{H}P^1 = S^4$, au lieu des coordonnées homogènes $(x : y)$, les coordonnées $(x' : y')$ qui leur sont

projectivement équivalentes:

$$x = \xi_1 x' + \eta_1 y', \quad y = \xi_2 x' + \eta_2 y', \tag{7}$$

avec les quaternions ξ_1, η_1, ξ_2, η_2 qui permettent d'exprimer x' et y' par x et y ((7) est une transformation inversible). Avec ce changement de coordonnées, les matrices C et D deviennent (on le voit sans peine) les matrices $C\xi_1 + D\xi_2$ et $C\eta_1 + D\eta_2$.

Problème 5. Montrer que *la transformation* (7) *est inversible si et seulement si ou bien* $\xi_1 \neq 0$ *et* $\xi_1\eta_2 - \xi_1\xi_2\xi_1^{-1}\eta_1 \neq 0$, *ou bien* $\xi_1 = 0$ *et* $\xi_1\eta_1 \neq 0$.

Problème 6. Montrer que

1° *avec les coordonnées* $(x : y)$ *choisies convenablement, on aboutit à* C *dont* N *lignes inférieures forment une matrice quaternionique inversible d'ordre* N;

2° *toute matrice* C *ayant cette propriété est équivalente (au sens des actions susmentionnées des groupes* Sp $(n + N)$ *et* GL $(N; \mathbb{H})$) *à une matrice de la forme*

$$\begin{Vmatrix} 0 \\ -E \end{Vmatrix}, \tag{8}$$

avec E *la matrice unité d'ordre* N.

On suppose donc sans restreindre la généralité que C est de la forme (8), si bien que (1), $y = 1$, s'écrit

$$Cx + D = \begin{Vmatrix} 0 \\ -E \end{Vmatrix} x + \begin{Vmatrix} \Lambda \\ B \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \Lambda \\ B - xE \end{Vmatrix}, \tag{9}$$

avec Λ et B des matrices quaternioniques constantes (indépendantes de x) de dimension $n \times N$ et $N \times N$ respectivement.

La condition a) de la proposition 1 donne lieu à deux conditions suivantes:

a′) *la matrice* $\overline{B}^{\mathsf T} B + \overline{\Lambda}^{\mathsf T}\Lambda$ *est réelle*;

a″) *la matrice* $\overline{B}^{\mathsf T} x + \bar{x} B$ *est réelle pour tout* $x \in \mathbb{H}$.

Problème 7. Montrer que *pour que* a″) *soit remplie, il faut et il suffit que la matrice* B *(donc* $\overline{B}^{\mathsf T} B + \overline{\Lambda}^{\mathsf T}\Lambda$ *de* a′)) *soit symétrique.*

Quant à b), elle est évidemment équivalente à la condition

b′) *quel que soit le quaternion* $x \in \mathbb{H}$, *les équations* $B\xi = x\xi$, $\Lambda\xi = 0$ *par rapport au vecteur* $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N)^{\mathsf T}$ *admettent une solution unique* $\xi = 0$.

Si l'on veut construire le $(N, \mathrm{Sp}\,(n))$-instanton associé aux matrices considérées C et D (i.e. aux matrices Λ et B), il faut en premier lieu trouver une $(n + N) \times n$-matrice $u = u(x)$ satisfaisant aux conditions (5). On la cherche comme

$$u = \begin{Vmatrix} -E \\ U \end{Vmatrix} \cdot W = \begin{Vmatrix} -W \\ UW \end{Vmatrix}, \tag{10}$$

où U est une matrice quaternionique de dimension $N \times n$ et W une $n \times n$-matrice quaternionique hermitienne (i.e. une matrice quaternionique pour laquelle $W^{\top} = \overline{W}$).

Problème 8. Montrer que *la matrice* (10) *vérifie*

1° *la condition* $\bar{u}^{\top} u = E$ *si et seulement si* W *est non dégénérée et*

(11) $$W^{-2} = E + \overline{U}^{\top} U;$$

2° *la condition* $\bar{u}^{\top} v = 0$, v *étant la matrice* (9), *si et seulement si* $-\Lambda + \overline{U}^{\top}(B - xE) = 0$, *i.e.*

(12) $$U = \overline{\Lambda (B - xE)^{-1}}^{\top}$$

$B - xE$ *étant supposée inversible.*

Montrer de plus que *le potentiel* (6) *associé à cette matrice est défini par*

(13) $$A = W\overline{U}^{\top}\, dU\, W + W^{-1}\, dW.$$

Ainsi, *deux matrices quaternioniques* Λ *et* B *vérifiant les conditions* a′), a″) (*B étant symétrique*) *et* b′) *donnent un* (N, Sp(n))*-instanton* F *à potentiel* (13), *où* U *et* W *sont les matrices définies par* (11) *et* (12).

Le potentiel (13) possède des singularités en x pour lesquelles $B - xE$ n'est pas inversible, mais on les élimine par une transformation de jauge (sans être consécutives à la construction, ces singularités apparaissent avec tel choix de la jauge).

* * *

Λ et B différentes peuvent en général donner lieu à un même (N, Sp (n))-instanton F.

Problème 9. Montrer que *les matrices* Λ, B *et* Λ_1, B_1 *donnent un même* (N, Sp (n))*-instanton* F *si et seulement s'il existe des matrices* $R \in O(N)$ *et* $T \in$ Sp (n) *telles que*

(14) $$\Lambda_1 = T \Lambda R, \quad B_1 = R^{\top} B R.$$

Puisque $\overline{B}_1^{\top} B_1 + \overline{\Lambda}_1^{\top} \Lambda_1 = R^{-1} (\overline{B}^{\top} B + \overline{\Lambda}^{\top} \Lambda) R$ (on note que $R^{-1} = R^{\top}$), il vient immédiatement par le théorème de réduction aux axes principaux que la matrice réelle symétrique $\overline{B}^{\top} B + \overline{\Lambda}^{\top} \Lambda$ de la condition a′) peut être supposée diagonale sans que cela nuise à la généralité de l'exposé.

Ainsi, on a finalement la

Proposition 2. *Les* (N, Sp (n))*-instantons sont paramétrés par les couples des matrices quaternioniques* (Λ, B) *de dimension* $n \times N$ *et* $N \times N$ *respectivement telles que*

1° *la matrice* B *soit symétrique* ($B^{\top} = B$);

2° *la matrice* $\overline{B}^{\top} B + \overline{\Lambda}^{\top} \Lambda$ *soit réelle et diagonale*;

3° *quel que soit le quaternion* $x \in \mathbb{H}$, *les équations* $B\xi = x\xi$, $\Lambda\xi = 0$ *par rapport au vecteur* $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N)^\top$ *admettent une solution unique* $\xi = 0$.

Deux couples (Λ, B) *et* (Λ_1, B_1) *donnent un même instanton si et seulement s'il y a entre eux les relations* (14), *où* $R \in O(N)$, $T \in \mathrm{Sp}(n)$. □

Si l'on introduit l'espace quotient $\mathfrak{M}_n(N)$ de l'espace de tous les couples (Λ, B) soumis aux conditions 1° à 3° par la relation d'équivalence donnée par (14), on peut donc dire que *les* $(N, \mathrm{Sp}(n))$*-instantons* F *sont en correspondance biunivoque canonique avec les points de* $\mathfrak{M}_n(N)$.

On dit d'ordinaire que $\mathfrak{M}_n(N)$ constitue l'*espace des modules des* $(N, \mathrm{Sp}(n))$*-instantons*.

La topologie de $\mathfrak{M}_n(N)$ offre sans doute un grand intérêt, mais on n'en sait que peu de chose.

Problème 10. Montrer que *l'espace* $\mathfrak{M}_n(N)$ *contient un sous-ensemble ouvert partout dense (i.e. son adhérence est égale à* $\mathfrak{M}_n(N)$*)* $\mathfrak{M}'_n(N)$, *variété différentiable de dimension* $4(n+1)N - n(2n+1)$ (de dimension $8N - 3$ si $n = 1$).

La nécessité de tenir compte du passage au quotient par les relations (14) entrave la construction des cartes de $\mathfrak{M}'_n(N)$. On peut d'ailleurs procéder comme suit. On soumet les couples (Λ, B) à la condition supplémentaire qui exige que les matrices $\bar{B}^\top B + \bar{\Lambda}^\top \Lambda$ aient leurs éléments diagonaux non croissants. Dans ce cas, on peut supposer que R des relations (14) est la matrice unité à l'extérieur d'un ensemble fermé nulle part dense (qu'on chasse de $\mathfrak{M}'_n(N)$ sans restreindre la généralité) associé aux couples (Λ, B) tels que la matrice $\bar{B}^\top B + \bar{\Lambda}^\top \Lambda$ possède des éléments diagonaux identiques, i.e. on suppose que *les points de la variété* $\mathfrak{M}'_n(N)$ *sont les classes des couples* (Λ, B) *par la relation d'équivalence* $(\Lambda_1, B_1) \sim (\Lambda, B)$ *qui a lieu sous la condition nécessaire et suffisante*

$$\Lambda_1 = T\Lambda \text{ et } B_1 = B, \tag{15}$$

où $T \in \mathrm{Sp}(n)$.

Cela simplifie certes le problème qui n'en demeure pas moins très ardu et reste en fait ouvert.

* * *

Voyons de plus près le cas $n = 1$ où l'on voit intervenir les N-instantons au sens de la leçon 22.

Si $n = 1$, la matrice Λ est le vecteur quaternionique $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ de longueur N, et les conditions 1° à 3° ne sont autres que les conditions imposées au couple (λ, B) (voir p. 336).

La matrice U définie par (12) est pour $n = 1$ la colonne quaternionique $u = (u_1, \ldots, u_N)^\top$ à N éléments, et la matrice W donnée par (11) constitue un nombre réel positif.

Problème 11. Montrer que *la forme différentielle* $-W^{-1}\,\mathrm{d}W$ *à coefficients réels est pour* $n = 1$ *la partie réelle de la forme différentielle quaternionique*

$$W\bar{U}^{\mathsf{T}}\,\mathrm{d}UW = \frac{\bar{u}^{\mathsf{T}}\,\mathrm{d}u}{1+|u|^2},$$

où $|u|^2 = \bar{u}^{\mathsf{T}}u = \sum_{i=1}^{N} |u_i|^2$, $\bar{u}^{\mathsf{T}}\,\mathrm{d}u = \sum_{i=1}^{N} \bar{u}_i\,\mathrm{d}u_i$.

Par conséquent, la formule (13) donnant le potentiel des N-instantons s'écrit pour $n = 1$ (on omet une fois de plus l'argument $x \in \mathbb{H}$)

$$A = \operatorname{Im} \frac{\bar{u}^{\mathsf{T}}\,\mathrm{d}u}{1+|u|^2}, \tag{16}$$

où $u = \overline{\lambda\,(B - x)}^{\mathsf{T}}$ (qui diffère sans doute de u de la formule (6), par exemple).

Quant aux relations (15), elles deviennent pour $n = 1$

$$\lambda_1 = t\lambda, \quad B_1 = B, \tag{17}$$

où $t \in \mathbb{H}$, $|t| = 1$. Aussi, on norme pour $\lambda_1 \neq 0$ le vecteur λ par la condition « la coordonnée λ_1 est un nombre réel strictement positif ». Cela norme λ de façon univoque, mais les points pour lesquels $\lambda_1 = 0$ (qui forment un autre ensemble fermé nulle part dense) se trouvent éliminés.

Aussi, on obtient une carte de la variété $\mathfrak{M}'_n(N)$ (ou les *paramètres indépendants* des physiciens, qui donnent les N-instantons) à condition d'exiger que $\lambda_1 > 0$ et de choisir, parmi les éléments de la matrice B et du vecteur λ de (λ, B) soumis aux conditions 1° à 3°, les éléments indépendants qui servent à exprimer tous les autres.

Soit $B = \| b_{ij} \|$, $i, j = 1, \ldots, N$, avec $b_{ij} = b_{ji}$ (cela vérifie automatiquement la condition 1°). Les éléments diagonaux de $\bar{B}^{\mathsf{T}}B + \bar{\lambda}^{\mathsf{T}}\lambda$ s'écrivent

$$\sum_{i=1}^{N} \bar{b}_{ji}b_{ij} + \bar{\lambda}_j\lambda_j = \sum_{i=1}^{N} |b_{ij}|^2 + |\lambda_j|^2,$$

si bien qu'ils sont réels. La condition 2° se ramène donc à $N(N-1)/2$ relations

$$\sum_{i=1}^{N} \bar{b}_{ij}b_{ik} + \bar{\lambda}_j\lambda_k = 0, \quad j < k, \tag{18}$$

qui signifient que les éléments non diagonaux de cette matrice sont égaux à 0. Ainsi, on obtient une carte de la variété $\mathfrak{M}'_1(N)$ si l'on résout les équations (18), i.e. si l'on considère, plus précisément, une partie des quaternions b_{ij}, λ_j comme *inconnues non principales*

pour exprimer avec eux les quaternions restants. Il faut également tenir compte de la condition 3°. Korépin et Chatachvili ont été les premiers à remarquer que l'on résout les équations (18) pour $N \leqslant 3$, mais que des difficultés d'ordre algébrique surgissent dès $N = 4$ qui s'avèrent insurmontables si l'on se borne aux quaternions.

* * *

Quand $N = 1$, les conditions (18) sont inexistantes, et les 1-instantons sont donnés par le quaternion $b = b_{11}$ et le nombre $\lambda = \lambda_1 > > 0$. Le potentiel A s'écrit donc

$$A = \operatorname{Im} \frac{\lambda^2 (b-x)^{-1} \overline{d(b-x)^{-1}}}{1+\lambda^2 |b-x|^{-2}} = \operatorname{Im} \frac{\lambda^2 (b-x)^{-1} \overline{(b-x)^{-1} dx (b-x)^{-1}}}{1+\lambda^2 |b-x|^{-2}} =$$

$$= \operatorname{Im} \frac{\lambda^2 d\bar{x} \overline{(b-x)}^{-1}}{\lambda^2 + |b-x|^2} = -\operatorname{Im} \frac{\lambda^2 (b-x)^{-1} dx}{\lambda^2 + |b-x|^2}.$$

Problème 12. Montrer qu'*il existe une équivalence de jauge* (*à l'extérieur du point* b) *entre* A *et le potentiel* $A_{\lambda, b}$ *défini par la formule* (22) *de la leçon* 21. [*Indication.* Poser $y = \lambda^2 (b - x)^{-1} + b$.]

Revenons à N quelconque. Si B est une matrice diagonale à éléments diagonaux $b_1, \ldots, b_N$ distincts et si $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ sont réels positifs, les conditions 1° à 3° sont automatiquement vérifiées, et on considère le N-instanton ainsi obtenu comme superposition de N-instantons F_{λ_i, b_i}, $i = 1, \ldots, N$, de la leçon 21. Cette solution s'appelle *solution de t'Hooft*.

* * *

Si $N = 2$, on a une seule équation (18), savoir

$$\bar{b}_{11} b_{12} + \bar{b}_{12} b_{22} + \lambda_1 \lambda_2 = 0.$$

L'équation étant linéaire en $\bar{b}_{11}$ est facilement résoluble. Il suffit de regarder le nombre $\lambda_1 > 0$ et les quaternions $b_{12}, b_{22}, \lambda_2$ comme inconnues non principales, auquel cas on a pour $b_{12} \neq 0$

$$b_{11} = -\frac{b_{12} \overline{(b_{22} b_{12} + \lambda_1 \bar{\lambda}_2)}}{|b_{12}|^2}. \tag{19}$$

La condition 3° équivaut pour $n = 1$ et $N = 2$ à exiger que les équations

$$\begin{aligned} b_{11}\xi_1 + b_{12}\xi_2 &= x\xi_1, \\ b_{12}\xi_1 + b_{22}\xi_2 &= x\xi_2, \\ \lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2 &= 0 \end{aligned}$$

n'admettent pour tout $x \in \mathbb{H}$ que la solution triviale $\xi_1 = 0, \xi_2 = 0$.

Mais si l'on élimine ξ_1 à l'aide de la troisième équation, on obtient pour ξ_2:

$$(x\lambda_1^{-1}\lambda_2 - b_{11}\lambda_1^{-1}\lambda_2 + b_{12})\,\xi_2 = 0,$$
$$(x + b_{12}\lambda_1^{-1}\lambda_2 - b_{22})\,\xi_2 = 0.$$

Aussi, la condition 3° est remplie si et seulement si l'un au moins des coefficients de ξ_2 est ici non nul pour tout quaternion x. On voit aisément que cela a lieu pour $\lambda_2 \neq 0$ si et seulement si

$$b_{11} - b_{12}\lambda_1\lambda_2^{-1} \neq b_{22} - b_{12}\lambda_1^{-1}\lambda_2. \tag{20}$$

Ainsi, le nombre $\lambda_1 > 0$ et les quaternions $b_{12} \neq 0$, b_{22} et $\lambda_2 \neq 0$ soumis à la condition (20), avec b_{11} défini par (19), forment un système de paramètres indépendants dans un domaine de la variété $\mathfrak{M}_1'$ (2) (i.e. *ce domaine est un voisinage de coordonnées dont les coordonnées locales sont le nombre* λ *et les coefficients des quaternions* b_{12}, b_{22} *et* λ_2). On constate en particulier que $\mathfrak{M}_1'$ (2) est de dimension $1 + 3\cdot 4 = 13 = 8\cdot 2 - 3$; voir problème 10.

Si l'on veut construire la carte associée aux instantons éliminés (pour $\lambda_2 = 0$ et $b_{12} = 0$), le choix des inconnues non principales doit être différent.

Dans la pratique, il suffit d'ailleurs de décrire les instantons éliminés en tant qu'éléments d'une famille qui dépend d'un nombre inférieur de variables. (Géométriquement, leur ensemble constitue une sous-variété (munie éventuellement de singularités) de dimension plus faible qui adhère au domaine de dimension 13 construit.)

Problème 13. Montrer que *les 2-instantons avec* $b_{12} = 0$ *et* $\lambda_2 = 0$ *sont paramétrés par le nombre* $\lambda_1 > 0$ *et les quaternions* b_{11}, b_{22}, $b_{11} + b_{22} \neq 0$ (*et qu'ils forment donc une variété de dimension* 9).

* * *

Le cas $N = 3$ est traité de façon analogue.

On a trois équations (18):

$$\begin{aligned} \bar b_{11}b_{12} + \bar b_{12}b_{22} + \bar b_{13}b_{23} + \lambda_1\lambda_2 &= 0,\\ \bar b_{11}b_{13} + \bar b_{12}b_{23} + \bar b_{13}b_{33} + \lambda_1\lambda_3 &= 0,\\ \bar b_{12}b_{13} + \bar b_{22}b_{23} + \bar b_{23}b_{33} + \bar\lambda_2\lambda_3 &= 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Si l'on considère les quaternions b_{12}, b_{13}, b_{22}, b_{23}, λ_2 et le nombre $\lambda_1 > 0$ comme inconnues non principales, on trouve pour $b_{12} \neq 0$ le quaternion b_{11} à partir de la première équation, et les deux autres équations en b_{33} et λ_3 s'écrivent

$$\bar b_{13}b_{33} + \lambda_1\lambda_3 = a, \quad \bar b_{23}b_{33} + \bar\lambda_2\lambda_3 = b,$$

avec a et b des quaternions connus, si bien qu'elles admettent pour $\lambda_2 \neq -\lambda_1 b_{23}$ une solution unique. Compte tenu de 3° qui se ramène (on le voit aisément) à certaines inégalités, cela donne une famille de 3-instantons qui dépendent de $1 + 5 \cdot 4 = 21 = 8 \cdot 3 - 3$ paramètres réels. Si $\lambda_2 = -\lambda_1 b_{23}$ ou $b_{12} = 0$, on obtient trois autres familles dont deux dépendent de 17 paramètres réels (du paramètre numérique λ_1 et des paramètres quaternioniques b_{12}, b_{13}, b_{22}, b_{23} et b_{11}, b_{22}, b_{23}, λ_2 respectivement) et la troisième est fonction de 13 paramètres réels (du paramètre numérique λ_1 et des paramètres quaternioniques b_{11}, b_{22}, b_{23}) régis par des inégalités correspondantes.

Lorsque $N = 4$, la méthode ne fonctionne pas parce que les équations en b_{ij} sont non linéaires (le vérifier !).

Tous ces calculs ne disent en fait rien sur la topologie de l'espace $\mathfrak{M}_1(N)$.

INDEX